О разрешимых сферических подгруппах полупростых алгебраических групп[1]

Р.С. Авдеев

Аннотация

Построена структурная теория связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах. На основе этой теории получена классификация всех таких подгрупп с точностью до сопряжённости.

§ 1. Введение

1.1. Пусть G — связная полупростая комплексная алгебраическая группа. Замкнутая подгруппа $H \subset G$ называется *сферической* (однородное пространство G/H — *сферическим*), если выполнено одно из следующих трёх эквивалентных условий:

(1) борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет открытую орбиту в G/H;

(2) всякое неприводимое G-многообразие X, содержащее однородное пространство G/H в качестве открытой орбиты, имеет конечное число G-орбит;

(3) для всякого неприводимого G-модуля V и всякого характера χ группы H размерность подпространства $\{v \in V \mid hv = \chi(h)v \ \forall h \in H\}$ не превосходит единицы.

Существуют и другие характеризации сферических подгрупп, однако приведённые три чаще всего используются при их изучении.

Сферические однородные пространства интенсивно изучались на протяжении последних тридцати лет. Однако до сих пор остаётся актуальным вопрос о классификации этих пространств или, что то же самое, вопрос о классификации сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах. Приведём краткую историческую справку по этому вопросу. Первый значительный результат в данном направлении был получен М. Кремером (M. Krämer) в 1979-м году [1]. Им были классифицированы все редуктивные сферические подгруппы в простых группах. Затем И. В. Микитюк в 1986-м году [2] и, независимо, М. Брион (M. Brion) в 1987-м году [3] классифицировали все редуктивные сферические подгруппы в произвольных полупростых группах (см. также уточнения в [4]). Следующим шагом на пути к классификации сферических однородных пространств стала работа Д. Луны (D. Luna) 1993-го года [5], где рассматривались разрешимые сферические подгруппы в полупростых группах. В этой работе все такие подгруппы описаны в следующем смысле: каждой подгруппе сопоставляется однозначно определяющий её набор комбинаторных инвариантов, после чего классифицируются все наборы, которые могут соответствовать рассматриваемым подгруппам. В 2001-м году Луна с помощью созданной им теории сферических систем описал (в том же смысле) все сферические подгруппы в полупростых группах типа A [6]. В дальнейшем подход Луны был развит его учениками П. Брави (P. Bravi) и Г. Пеццини (G. Pezzini), которые в 2009-м году описали все сферические подгруппы в полупростых группах с классическими множителями [7]. Наконец, в 2010-м году С. Кюпит-Футу (S. Cupit-Foutou), ещё одна ученица Луны, доказав так называемую гипотезу Луны, получила описание всех сферических подгрупп в произвольных полупростых группах [8]. Таким образом, на настоящий момент имеется описание в комбинаторных терминах всех сферических подгрупп в полупростых группах. Однако это

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00648-а)

описание имеет один серьёзный недостаток: оно не даёт *алгоритма* построения сферической подгруппы по набору инвариантов, однозначно определяющему эту подгруппу. Иными словами, имеющееся описание является *неявным*. В связи с указанным недостатком по-прежнему представляет интерес получение *явной* классификации всех сферических подгрупп в полупростых группах.

Настоящая работа содержит новый подход к классификации связных разрешимых сферических подгрупп в полупростых алгебраических группах. Этот подход коренным образом отличается от подхода Луны 1993-го года [5] и позволяет получить явную классификацию.

1.2. На протяжении всей работы основным полем является поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Все группы предполагаются алгебраическими и, если не оговорено противное, связными, а их подгруппы — замкнутыми. Касательные алгебры групп, обозначаемых прописными латинскими буквами, обозначаются соответствующими строчными готическими буквами. Веса торов отождествляются с их дифференциалами.

До конца работы зафиксируем следующие обозначения:

G — произвольная полупростая алгебраическая группа;

$B \subset G$ — фиксированная борелевская подгруппа группы G;

$T \subset B$ — фиксированный максимальный тор группы G;

$U \subset B$ — максимальная унипотентная подгруппа группы G;

$N_G(T)$ — нормализатор группы T в группе G;

$W = N_G(T)/T$ — группа Вейля группы G относительно тора T;

$\mathfrak{X}(T)$ — решётка характеров (весов) тора T;

$Q = \mathfrak{X}(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ — рациональное векторное пространство, натянутое на $\mathfrak{X}(T)$;

$\Delta \subset \mathfrak{X}(T)$ система корней группы G относительно тора T;

$\Pi \subset \Delta$ — система простых корней, отвечающая борелевской подгруппе B;

$\Delta_+ \subset \Delta$ — подмножество положительных корней по отношению к Π;

$\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ — корневое подпространство, отвечающее корню $\alpha \in \Delta$;

$e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ — фиксированный ненулевой вектор.

Пусть $H \subset B$ — разрешимая подгруппа, $N \subset U$ — её унипотентный радикал. Будем говорить, что подгруппа H *стандартно вложена* в B (вложение H в B является *стандартным*), если подгруппа $S = H \cap T \subset T$ является максимальным тором в H. В этой ситуации, очевидно, имеем $H = S \rightthreetimes N$. Хорошо известно, что всякую разрешимую подгруппу в G при помощи сопряжения подходящим элементом из G можно перевести в подгруппу, которая стандартно вложена в B.

1.3. Теперь обсудим структуру настоящей работы и основные её идеи.

В § 2 доказывается удобный критерий сферичности разрешимой подгруппы в терминах её касательной алгебры (теорема 1). Этот критерий лежит в основе всей работы. Затем при помощи этого критерия доказывается теорема 2, которую можно рассматривать как первое приближение к классификации разрешимых сферических подгрупп. Теорема 2 утверждает, что разрешимая сферическая подгруппа H, стандартно вложенная в B, однозначно определяется своим максимальным тором $S = H \cap T$ и множеством $\Psi = \{\alpha \in \Delta_+ \mid \mathfrak{g}_\alpha \not\subset \mathfrak{h}\}$.

В § 3 исследуется вопрос о том, каким может быть множество Ψ. Для корней из этого множества вводится терминология «активные корни». Изучение свойств активных корней завершается их классификацией (теорема 3): даётся ответ на вопрос, каким может быть каждый отдельно взятый активный корень. В результате дальнейшего изучения активных корней каждой разрешимой сферической подгруппе H, стандартно вложенной в B, сопоставляется набор комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, где $S = H \cap T$ — максимальный тор в H, $\mathrm{M} \subset \Psi$ — множество так называемых максимальных активных корней, $\pi\colon \mathrm{M} \to \Pi$ — отображение, $\sim$ — отношение эквивалентности на M. Дальше определяется ряд условий, которым удовлетворяет набор $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$. Параграф завершается теоремой единственности (теорема 4): всякая разрешимая сферическая подгруппа H, стандартно вложенная в B, однозначно определяется своим набором комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, причём этот набор удовлетворяет ряду условий, упомянутых выше.

В § 4 доказывается теорема существования (теорема 5): для всякого абстрактного набора комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, удовлетворяющего ряду условий, сформулированных в теореме единственности, существует разрешимая сферическая подгруппа H, стандартно вложенная в B, с этим набором комбинаторных данных. Доказательство теоремы существования содержит алгоритм построения подгруппы H по набору $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$.

Наконец, § 5 посвящён вопросу о том, когда две разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B, сопряжены в группе G. Для этой цели вводится понятие элементарного преобразования. Элементарное преобразование — это переход вида $H_1 \mapsto H_2$, где H_1, H_2 — разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B, и $H_2 = r_\alpha H_1 r_\alpha^{-1}$ для некоторого простого отражения r_α. Ответ на поставленный вопрос даётся теоремой 6: две разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B, сопряжены в G тогда и только тогда, когда существует цепочка элементарных преобразований, переводящая одну из этих подгрупп в другую.

Теоремы 4, 5 и 6 дают полную классификацию разрешимых сферических подгрупп в полупростых группах.

1.4. Результаты настоящей работы доложены на международной конференции 'Algebraic groups', проходившей с 18-го по 24-е апреля 2010-го года в Обервольфахе, Германия.

Автор выражает благодарность Н. Е. Горфинкель, многочисленные беседы с которой способствовали развитию теории активных корней, а также Э. Б. Винбергу за полезные обсуждения.

1.5. Некоторые обозначения и соглашения.

Если $A \subset \mathfrak{X}(T)$ — подмножество, то символом $\langle A \rangle$ обозначается линейная оболочка подмножества A в пространстве Q.

Для каждого корня $\alpha = \sum\limits_{\gamma \in \Pi} k_\gamma \gamma \in \Delta_+$ введём его *носитель* $\mathrm{Supp}\ \alpha = \{\gamma \mid k_\gamma > 0\}$ и *высоту* $\mathrm{ht}\,\alpha = \sum\limits_{\gamma \in \Pi} k_\gamma$. Если $\alpha \in \Delta_+$, то положим $\Delta(\alpha) = \Delta \cap \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \rangle$ и $\Delta_+(\alpha) = \Delta_+ \cap \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \rangle$. Множество $\Delta(\alpha)$ является неразложимой системой корней с системой простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha$, множество положительных корней этой системы корней совпадает с $\Delta_+(\alpha)$.

Если V — векторное пространство, то через V^* обозначается пространство линейных функций на V.

Для произвольных групп K, L с условием $K \subset L$ символами $N_L(K)$ и $Z_L(K)$ обозначаются соответственно нормализатор группы K в группе L и централизатор группы K в группе L.

Пусть L — группа и L_1, L_2 — её подгруппы. Тогда запись $L = L_1 \leftthreetimes L_2$ означает, что группа L разлагается в полупрямое произведение своих подгрупп L_1, L_2, т. е. $L = L_1 L_2$, $L_1 \cap L_2 = \{e\}$ и L_2 — нормальная подгруппа в L.

Допуская вольность в речи, мы будем отождествлять корни из множества Π и соответствующие им вершины схемы Дынкина системы простых корней Π.

§ 2. Критерий сферичности и некоторые его применения

2.1. Пусть фиксирована разрешимая подгруппа $H \subset G$, стандартно вложенная в B. Пусть $S = H \cap T$ и $N = H \cap U$ — максимальный тор и унипотентный радикал группы H соответственно. Обозначим через $\tau \colon \mathfrak{X}(T) \to \mathfrak{X}(S)$ отображение ограничения характеров тора T на S. Пусть $\Phi \subset \mathfrak{X}(S)$ — система весов действия тора S на $\mathfrak{u}$ посредством присоединённого представления группы G. Имеем $\mathfrak{u} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Phi} \mathfrak{u}_\lambda$, где $\mathfrak{u}_\lambda \subset \mathfrak{u}$ — весовое подпространство веса λ относительно S. Очевидно, что $\Phi = \tau(\Delta_+)$ и $\mathfrak{u}_\lambda = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta_+ : \tau(\alpha) = \lambda} \mathfrak{g}_\alpha$ для любого $\lambda \in \Phi$. Пусть $\mathfrak{n} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Phi} \mathfrak{n}_\lambda$ — разложение алгебры $\mathfrak{n}$ в прямую сумму весовых подпространств относительно тора S, при этом $\mathfrak{n}_\lambda \subset \mathfrak{u}_\lambda$ для всех $\lambda \in \Phi$ и некоторые из пространств $\mathfrak{n}_\lambda$ могут быть нулевыми. Для каждого $\lambda \in \Phi$ обозначим через c_λ коразмерность пространства $\mathfrak{n}_\lambda$ в пространстве $\mathfrak{u}_\lambda$.

Следующая теорема даёт удобный критерий сферичности для разрешимых подгрупп.

Теорема 1. *Пусть $H \subset G$ — разрешимая подгруппа, стандартно вложенная в B. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *подгруппа H является сферической в G;*

(2) *для всякого $\lambda \in \Phi$ выполнено неравенство $c_\lambda \leqslant 1$, и все веса с условием $c_\lambda = 1$ линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$.*

Доказательство. Рассуждение проведём в несколько шагов.

Шаг 1. Из трёх определений сферичности, приведённых в п. 1.1, воспользуемся первым: произвольная подгруппа $H \subset G$ является сферической тогда и только тогда, когда подгруппа B имеет открытую орбиту в G/H. Последнее условие равносильно тому, что подгруппа H имеет открытую орбиту в G/B. Пусть теперь $H \subset B$ — наша разрешимая подгруппа. Рассмотрим разложение Брюа $G/B = \bigcup\limits_{\sigma \in W} (U\sigma B)/B$. Легко видеть, что действие подгруппы H сохраняет каждую из клеток Брюа многообразия G/B и, в частности, открытую клетку $(U\sigma_0 B)/B \simeq U$, где σ_0 — элемент наибольшей длины в группе W. Поэтому условие сферичности подгруппы H эквивалентно тому, что H имеет открытую орбиту в $(U\sigma_0 B)/B$. Другими словами, подгруппа H сферична тогда и только тогда, когда H имеет открытую орбиту в U, где действие элемента $sl \in H$ ($s \in S$, $l \in N$) переводит элемент $u \in U$ в $slus^{-1}$. Сформулированный в предыдущем предложении критерий сферичности содержится в работе Бриона [3].

Шаг 2. Покажем, что сферичность подгруппы H эквивалентна наличию открытой S-орбиты в U/N при действии $(s, uN) \mapsto sus^{-1}N$. Рассмотрим морфизм $\varphi \colon U \to U/N$, $\varphi(u) = u^{-1}N$. Он сюръективен и S-эквивариантен. Предположим, что в U/N имеется открытая S-орбита X. Тогда её прообраз $\varphi^{-1}(X)$ открыт в U и является H-орбитой. Действительно, пусть $u_1, u_2 \in \varphi^{-1}(X)$. Тогда для некоторых $s_0 \in S$ и $l_0 \in N$ имеем $u_1^{-1} = s_0 u_2^{-1} s_0^{-1} l_0$, откуда $u_2 = s_0^{-1} l_0 u_1 s_0$. Обратно, пусть в U/N нет открытой S-орбиты. Тогда по теореме Розенлихта существует непостоянная S-инвариантная рациональная функция $f \in \mathbb{C}(U/N)^S$. Рассмотрим рациональную функцию $\widetilde{f} = \varphi^*(f) \in \mathbb{C}(U)$, $\widetilde{f}(u) = f(u^{-1}N)$. Эта функция непостоянна и H-инвариантна, поэтому в U нет открытой H-орбиты.

Шаг 3. При каждом $\lambda \in \Phi$ с условием $c_\lambda > 0$ выберем подпространство $\mathfrak{p}_\lambda \subset \mathfrak{u}_\lambda$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\mathfrak{u}_\lambda = \mathfrak{n}_\lambda \oplus \mathfrak{p}_\lambda$. Положим $\mathfrak{p} = \bigoplus\limits_{\lambda \in \Phi \colon c_\lambda > 0} m_\lambda$, так что $\mathfrak{u} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$. Рассмотрим действие тора S в $\mathfrak{p}$ посредством присоединённого представления группы G. Покажем, что условие (2) теоремы равносильно тому, что при этом действии в $\mathfrak{p}$ имеется открытая S-орбита. Действительно, пусть условие (2) выполнено. Выберем в каждом подпространстве $\mathfrak{p}_\lambda$, где $c_\lambda = 1$, по ненулевому элементу. Тогда все выбранные элементы образуют базис в $\mathfrak{p}$. Легко видеть, что открытая S-орбита в $\mathfrak{p}$ состоит из тех элементов, у которых все координаты в выбранном базисе ненулевые. Теперь пусть условие (2) не выполнено. Выберем в каждом подпространстве $\mathfrak{p}_\lambda$, где $c_\lambda \geqslant 1$, базис и объединим все полученные базисы в базис пространства $\mathfrak{p}$. Если при некотором $\lambda \in \Phi$ выполнено неравенство $c_\lambda \geqslant 2$, то для любых двух различных базисных элементов из $\mathfrak{p}_\lambda$ отношение отвечающих этим элементам координатных функций является непостоянной инвариантной рациональной функцией на $\mathfrak{p}$, что влечёт отсутствие в $\mathfrak{p}$ открытой S-орбиты. Теперь предположим, что $c_\lambda \leqslant 1$ для всех $\lambda \in \Phi$, но нашлись такие элементы $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Phi$, что $c_{\lambda_1} = \ldots = c_{\lambda_k} = 1$ и $p_1\lambda_1 + \ldots + p_k\lambda_k = 0$ для некоторого ненулевого набора $(p_1, \ldots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$. Пусть $y_1, \ldots, y_k$ — координатные функции, отвечающие базисным элементам подпространств $\mathfrak{p}_{\lambda_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{\lambda_k}$ соответственно. Тогда легко видеть, что непостоянная рациональная функция $y_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot y_k^{p_k}$ на $\mathfrak{p}$ является S-инвариантной, поэтому в $\mathfrak{p}$ нет открытой S-орбиты.

Пусть $\exp\colon \mathfrak{u} \to U$ — экспоненциальное отображение. Оно осуществляет S-эквивариантный изоморфизм пространства $\mathfrak{p}$ как алгебраического многообразия на множество $P = \exp(\mathfrak{p}) \subset U$ с действием группы S сопряжениями. В силу доказанного выше условие (2) теоремы равносильно наличию в P открытой S-орбиты.

Шаг 4. Осталось показать, что в U/N имеется открытая S-орбита тогда и только тогда, когда в P имеется открытая S-орбита. Прежде всего отметим, что $\dim P = \dim U/N$. Затем рассмотрим морфизм $\psi\colon P \to U/N$, заданный при $m \in P$ формулой $\psi(m) = mN$. Этот морфизм S-эквивариантен, а его дифференциал в единице $d_e\psi\colon \mathfrak{p} \to \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$, $x \mapsto x + \mathfrak{n}$, является изоморфизмом векторных пространств в силу естественного изоморфизма $\mathfrak{p} \simeq \mathfrak{u}/\mathfrak{n}$. Отсюда следует, что морфизм ψ доминантен. Пусть $X \subset U/N$ — открытая S-орбита. Тогда множество $\psi^{-1}(X) \subset P$ непусто, открыто и S-инвариантно. Пусть $N \subset \psi^{-1}(X)$ — произвольная S-орбита. Тогда множество $\psi(N)$ содержится в X и является S-орбитой, а значит, совпадает с X. Так как $\dim N \geqslant \dim X = \dim U/N = \dim P$, то $\dim N = \dim P$ и орбита N открыта в P. Обратно, пусть N — открытая S-орбита в P. Тогда множество $\psi(N)$ является S-орбитой в U/N. Предположим, что $\overline{\psi(N)} \neq U/N$. Тогда $Y = U/N \backslash \overline{\psi(N)}$ — непустое открытое подмножество в U/N, поэтому его прообраз открыт в P и непуст в силу доминантности морфизма ψ. Но тогда $\psi^{-1}(Y) \cap N \neq \varnothing$, и мы приходим к противоречию. Значит, $\overline{\psi(N)} = U/N$ и орбита $\psi(N)$ открыта в U/N. $\square$

2.2. В этом пункте мы выведем из теоремы 1 несколько следствий, которые сыграют решающую роль в последующем изложении.

Прежде всего, напомним следующую хорошо известную лемму из линейной алгебры.

Лемма 1. *Если векторы $v_1, \ldots, v_n$ евклидова пространства V лежат в одном полупространстве и образуют между собой попарно неострые углы, то эти векторы линейно независимы.*

Пусть $H \subset B$ — разрешимая сферическая подгруппа в G, стандартно вложенная в B. Положим $S = H \cap T$ и $N = H \cap U$, так что $H = S \leftthreetimes N$. Из сферичности подгруппы H следует, что для неё выполнено условие (2) теоремы 1. Обозначим все веса $\lambda \in \Phi$, для которых $c_\lambda = 1$, через $\omega_1, \ldots, \omega_K$. Эти веса линейно независимы в $\mathfrak{X}(S)$, и, в частности, каждый из них отличен от нуля. Для каждого $i \in \{1, \ldots, K\}$ обозначим через Ψ_i множество всех корней $\alpha \in \Delta_+$, для которых $\tau(\alpha) = \omega_i$ и $\mathfrak{g}_\alpha \not\subset \mathfrak{n}$. Положим $\mathfrak{u}_i = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Psi_i} \mathfrak{g}_\alpha$. Ясно, что $\mathfrak{u}_i \subset \mathfrak{u}_{\omega_i}$ при любом $i \in \{1, \ldots, K\}$. Далее, при каждом $i = 1, \ldots, K$ подпространство

$\mathfrak{n}\cap\mathfrak{u}_i$ задаётся в пространстве $\mathfrak{u}_i$ обращением в нуль некоторой (определённой с точностью до пропорциональности) линейной функции, которую обозначим через ξ_i. Ясно, что если $\alpha \in \Psi_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, K\}$, то ограничение функции ξ_i на $\mathfrak{g}_\alpha$ не равно нулю тождественно. Положим также $\Psi = \Psi(H) = \Psi_1 \cup \ldots \cup \Psi_K$.

Лемма 2. *Пусть $\alpha, \beta \in \Psi$ и $\gamma = \beta - \alpha \in \Delta_+$. Тогда $\gamma \notin \Psi$.*

Доказательство. Имеем $\tau(\gamma) = \tau(\beta) - \tau(\alpha)$. Если $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$, то $\tau(\gamma) = 0$, что невозможно при $\gamma \in \Psi$. Если $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$, то веса $\tau(\alpha)$, $\tau(\beta)$ линейно независимы и поэтому оба отличны от $\tau(\gamma)$. Мы получили, что веса $\tau(\alpha)$, $\tau(\beta)$, $\tau(\gamma)$ попарно различны и линейно зависимы, а это тоже невозможно при $\gamma \in \Psi$. $\square$

Предложение 1. *Пусть $1 \leqslant i, j \leqslant K$ (причём необязательно $i \neq j$) и корни $\alpha \in \Psi_i$, $\beta \in \Psi_j$ различны. Предположим, что $\gamma = \beta - \alpha \in \Delta_+$. Тогда $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$. В частности, $|\Psi_i| \leqslant |\Psi_j|$.*

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\gamma \notin \Psi$ и $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{K}$. Предположим, что для некоторого элемента $\alpha' \in \Psi_i$ оказалось $\alpha' + \gamma \notin \Psi_j$. Выберем в одномерном подпространстве $(\mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\alpha'}) \cap \mathfrak{n}$ ненулевой элемент $x = pe_\alpha + p'e_{\alpha'}$, где $p, p' \in \mathbb{C}$. Заметим, что $p \neq 0$, $p' \neq 0$ и $[x, e_\gamma] \in \mathfrak{n}$. Пусть $q \neq 0$ таково, что $[e_\alpha, e_\gamma] = qe_\beta$. Тогда $[x, e_\gamma] = pqe_\beta + p'[e_{\alpha'}, e_\gamma]$. Если $\alpha' + \gamma \in \Delta$, то из условий $\tau(\alpha' + \gamma) = \omega_j$ и $\alpha' + \gamma \notin \Psi_j$ следует, что $[e_{\alpha'}, e_\gamma] \in \mathfrak{g}_{\alpha'+\gamma} \subset \mathfrak{n}$, откуда $e_\beta \in \mathfrak{n}$. Если $\alpha' + \gamma \notin \Delta$, то $[e_{\alpha'}, e_\gamma] = 0$, и снова $e_\beta \in \mathfrak{n}$. Итак, мы получили, что $\mathfrak{g}_\beta \subset \mathfrak{n}$, а это противоречит условию $\beta \in \Psi_j$. $\square$

Следствие 1. *При каждом фиксированном $j = 1, \ldots, K$ корни, входящие в Ψ_j, образуют между собой попарно неострые углы и линейно независимы.*

Доказательство. При $|\Psi_j| = 1$ доказывать нечего. При $|\Psi_j| \geqslant 2$ предположим, что два различных корня $\alpha, \beta \in \Psi_j$ удовлетворяют условию $(\alpha, \beta) > 0$. Тогда вектор $\gamma = \beta - \alpha$ является корнем. Без ограничения общности можно считать, что $\gamma \in \Delta_+$. Тогда по предложению 1 имеем $\Psi_j + \gamma \subset \Psi_j$, что неверно. Значит, для любых двух различных корней $\alpha, \beta \in \Psi_j$ имеем $(\alpha, \beta) \leqslant 0$. Линейная независимость всех корней из Ψ_j теперь следует из леммы 1. $\square$

Предложение 1 позволяет ввести на множестве $\widetilde{\Psi} = \{\Psi_1, \ldots, \Psi_K\}$ частичный порядок следующим образом. При $i \neq j$ будем писать $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$, если $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$ для некоторого корня $\gamma \in \Delta_+$. Будем писать $\Psi_i \prec \Psi_j$, если $i = j$ или существует цепочка $\Psi_i = \Psi_{k_1}, \Psi_{k_2}, \ldots, \Psi_{k_{m-1}}, \Psi_{k_m} = \Psi_j$, в которой $\Psi_{k_p} \prec\!\!\prec \Psi_{k_{p+1}}$ при всех $p = 1, \ldots, m-1$. В частности, если $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$, то $\Psi_i \prec \Psi_j$. Ясно, что отношение $\prec$ транзитивно. Далее, каждому множеству Ψ_i сопоставим число $\rho(\Psi_i) = \sum\limits_{\alpha \in \Psi_i} \operatorname{ht} \alpha$. Тогда, очевидно, при $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$ имеем $\rho(\Psi_i) < \rho(\Psi_j)$. Отсюда следует, что при $i \neq j$ соотношения $\Psi_i \prec \Psi_j$ и $\Psi_j \prec \Psi_i$ одновременно выполняться не могут. Значит, отношение $\prec$ действительно является частичным порядком на $\widetilde{\Psi}$.

При $i \in \{1, \ldots, K\}$ корень $\alpha \in \Psi_i$ назовём *максимальным*, если множество Ψ_i максимально в $\widetilde{\Psi}$ относительно частичного порядка $\prec$.

Лемма 3. *Пусть $\Psi_{i_1}, \ldots, \Psi_{i_m}$ — все максимальные элементы множества $\widetilde{\Psi}$ относительно порядка $\prec$. Тогда все корни, входящие во множество $\Psi_{i_1} \cup \ldots \cup \Psi_{i_m}$ (т. е. все максимальные корни), образуют между собой попарно неострые углы и линейно независимы.*

Доказательство. С учётом леммы 1 и следствия 1 достаточно показать, что при $p \neq q$ любые два корня $\alpha \in \Psi_{i_p}$ и $\beta \in \Psi_{i_q}$ образуют между собой неострый угол. Предположим, что это не так. Тогда разность $\gamma = \beta - \alpha$ является корнем, причём без ограничения общности можно считать, что $\gamma \in \Delta_+$. По предложению 1 получаем $\Psi_{i_p} + \gamma \subset \Psi_{i_q}$, откуда $\Psi_{i_p} \prec \Psi_{i_q}$. Последнее соотношение противоречит условию максимальности множества Ψ_{i_p} в $\widetilde{\Psi}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть* $1 \leqslant i, j \leqslant K$, $i \neq j$, $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$ *и корень* $\gamma \in \Delta_+$ *таков, что* $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$. *Тогда линейная функция* ξ_i *однозначно с точностью до пропорциональности определяется линейной функцией* ξ_j.

Доказательство. Учитывая лемму 2, получаем $\gamma \notin \Psi$, откуда $\mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{n}$. Из условия $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_j$ следует, что линейное отображение $l\colon \mathfrak{u}_i \to \mathfrak{u}_j$, $x \mapsto [x, e_\gamma]$, инъективно. Рассмотрим линейную функцию $\xi_i' \in \mathfrak{u}_i^*$, являющуюся обратным образом линейной функции ξ_j при отображении l, т. е. $\xi_i'(x) = \xi_j(l(x))$ при $x \in \mathfrak{u}_i$. Имеем $\xi_i' \not\equiv 0$, поскольку $\xi_j(e_\alpha) \neq 0$ для любого $\alpha \in \Psi_j$. Так как $l(\mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i) \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_j$, то $\xi_i'(x) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{u}_i$. Отсюда незамедлительно вытекает, что для некоторого $c_{ij} \neq 0$ имеем $\xi_i = c_{ij}\xi_i'$, т. е. $\xi_i(x) = c_{ij}\xi_j([x, e_\gamma])$ для всех $x \in \mathfrak{u}_i$. $\square$

Теорема 2. *Разрешимая сферическая подгруппа* $H \subset G$, *стандартно вложенная в* B, *однозначно с точностью до сопряжения элементом тора* T *определяется своим максимальным тором* $S \subset T$ *и множеством* $\Psi \subset \Delta_+$.

Доказательство. Множество весов $\{\omega_1, \ldots, \omega_K\}$ однозначно определяется как образ множества Ψ при отображении τ. Для каждого $i = 1, \ldots, K$ множество Ψ_i однозначно определяется как множество $\{\alpha \in \Psi \mid \tau(\alpha) = \omega_i\}$. Далее, по лемме 22 из условия $\Psi_i \prec \Psi_j$ следует, что линейная функция ξ_i однозначно с точностью до пропорциональности определяется по линейной функции ξ_j, поэтому вся совокупность линейных функций $\xi_1, \ldots, \xi_K$ однозначно с точностью до пропорциональности определяется линейными функциями ξ_j, отвечающими максимальным элементам Ψ_j множества $\widetilde{\Psi}$.

Сопряжение элементом $t \in T$ переводит алгебру $\mathfrak{h}$ в изоморфную, при этом на каждом из пространств $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta_+$, оно действует умножением на вес $\alpha(t)$. По лемме 3 все максимальные корни линейно независимы, поэтому все линейные функции ξ_i, отвечающие максимальным элементам Ψ_i множества $\widetilde{\Psi}$, можно при подходящем выборе $t \in T$ независимо друг от друга привести к однозначному виду. Например, к такому, чтобы в базисе $\{e_\alpha \mid \alpha \in \Psi_i\}$ линейная функция ξ_i записывалась как сумма всех координат. Последнее возможно, так как $\xi_i|_{\mathfrak{g}_\alpha} \not\equiv 0$ для любого $\alpha \in \Psi_i$. $\square$

Из теоремы 2 вытекает следующий важный результат.

Следствие 2. *Пусть* $S \subset T$ *— произвольный тор. Тогда с точностью до сопряжения элементом из* T *в группе* G *существует не более чем конечное число разрешимых сферических подгрупп, стандартно вложенных в* B *и содержащих тор* S *в качестве максимального тора.*

Доказательство следует из теоремы 2 и конечности количества различных подмножеств множества Δ_+. $\square$

§ 3. Теория активных корней

Как мы увидели в п. 2.2 (см. теорему 2), разрешимая сферическая подгруппа $H \subset G$, стандартно вложенная в B, однозначно с точностью до сопряжения элементом тора T определяется своим максимальным тором $S \subset T$ и множеством $\Psi \subset \Delta_+$. Настоящий параграф посвящён изучению корней, входящих в множество Ψ (в п. 3.1 эти корни будут названы «активными»), а также множества Ψ в целом.

До конца параграфа мы фиксируем разрешимую сферическую подгруппу $H = S \leftthreetimes N \subset \subset G$, стандартно вложенную в B (где $S = H \cap T$, $N = H \cap U$), и сохраняем все обозначения, введённые в § 2.

3.1. В этом пункте мы введём понятие активного корня, установим основные свойства активных корней и получим их классификацию.

Определение 1. Корень $\alpha \in \Delta_+$ назовём *активным*, если $\mathfrak{g}_\alpha \not\subset \mathfrak{n}$.

Очевидно, что корень α является активным тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Psi$.

Лемма 4. *Пусть α — активный корень и $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta_+$. Тогда из двух корней β, γ ровно один является активным.*

Доказательство. Если никакой из корней β, γ не является активным, то $\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma \subset \mathfrak{n}$, откуда $\mathfrak{g}_\alpha = [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_\gamma] \subset \mathfrak{n}$, что не так. Поэтому хотя бы один из двух корней β, γ активный. По лемме 2 эти два корня не могут быть активными одновременно. □

Определение 2. Будем говорить, что активный корень β *подчинён* активному корню α, если $\alpha = \beta + \gamma$ для некоторого $\gamma \in \Delta_+$.

Определение 3. Активный корень α назовём *максимальным*, если он не подчинён никакому другому активному корню.

Отметим, что понятие максимальности активного корня, введённое в этом определении, совпадает с понятием максимальности, рассматривавшемся в п. 2.2.

Определение 4. Если α — активный корень, то множество, состоящее из корня α и всех подчинённых ему активных корней, назовём *семейством активных корней, порождённым активным корнем α*. Обозначим это множество через $F(\alpha)$.

Для каждого корня $\alpha \in \Delta_+$ обозначим через $s(\alpha)$ количество представлений корня α в виде суммы двух положительных корней. Тогда если корень α активный, то по лемме 4 количество активных корней, подчинённых корню α, равно $s(\alpha)$, т. е. $s(\alpha) = |F(\alpha)| - 1$.

Лемма 5. *Пусть α — активный корень. Тогда:*

(а) *Если $\beta \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, то $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$.*

(б) *Если $\beta, \gamma \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$ и $\beta \neq \gamma$, то $\tau(\beta) \neq \tau(\gamma)$.*

Доказательство. (а) Положим $\gamma = \alpha - \beta \in \Delta_+$. Предположим, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Тогда $\alpha, \beta \in \Psi_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, K\}$. По предложению 1 имеем $\Psi_i + \gamma \subset \Psi_i$, что не так. Значит, $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$.

(б) Пусть $\alpha = \beta + \beta' = \gamma + \gamma'$, где $\beta', \gamma' \in \Delta_+$, причём $\beta' \neq \gamma'$. Пусть также $\alpha \in \Psi_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, K\}$. Предположим, что $\tau(\beta) = \tau(\gamma)$. Тогда $\tau(\beta') = \tau(\gamma')$. Далее, по предложению 1 получаем $\beta + \gamma', \gamma + \beta' \in \Psi_i$, откуда $\tau(\beta + \gamma') = \tau(\gamma + \beta') = \tau(\alpha)$. Отметим, что в силу условия $\beta \neq \gamma$ корни $\alpha, \beta + \gamma', \gamma + \beta'$ различны. По следствию 1 эти три корня линейно независимы. С другой стороны, между ними имеется линейная зависимость $2\alpha = (\beta + \gamma') + (\gamma + \beta')$, и мы получаем противоречие. Поэтому $\tau(\beta) \neq \tau(\gamma)$. □

Следствие 3. *Если α — активный корень, то все корни из $F(\alpha)$ линейно независимы.*

Доказательство. Из леммы 5 следует, что все веса $\tau(\beta)$, где $\beta \in F(\alpha)$, различны. По теореме 1 эти веса линейно независимы. Значит, все корни из $F(\alpha)$ подавно линейно независимы. □

Лемма 6. *Пусть $\alpha \in \Delta_+$. Тогда:*

(а) *если $\Delta(\alpha)$ — система корней типа* A, D *или* E, *то $s(\alpha) = \operatorname{ht} \alpha - 1$;*

(б) *в общем случае* $s(\alpha) \geqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha| - 1$*;*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\Delta = \Delta(\alpha)$.

Докажем (а). Так как система корней Δ имеет тип A, D или E, то в ней длины всех корней одинаковы, поэтому:

(1) сумма двух корней является корнем тогда и только тогда, когда угол между ними равен $2\pi/3$;

(2) разность двух корней является корнем тогда и только тогда, когда угол между ними равен $\pi/3$;

(3) для любых $\beta \in \Delta$ и $\beta_0 \in \Pi$ корень $r_{\beta_0}(\beta)$ равен либо $\beta - \beta_0$, либо β, либо $\beta + \beta_0$.

Воспользуемся индукцией по $\mathrm{ht}\,\alpha$. При $\mathrm{ht}\,\alpha = 1$ утверждение верно. Предположим, что $\mathrm{ht}\,\alpha = k$ и утверждение доказано для всех корней $\alpha' \in \Delta_+$ с условием $\mathrm{ht}\,\alpha' < k$. Рассмотрим произвольный простой корень α_0, для которого $\beta = \alpha - \alpha_0 \in \Delta_+$. Тогда корни α_0 и β образуют между собой угол $2\pi/3$, и потому $\alpha = r_{\alpha_0}(\beta)$. Имеем $\mathrm{ht}\,\beta = \mathrm{ht}\,\alpha - 1$, поэтому $s(\beta) = \mathrm{ht}\,\alpha - 2$ по предположению индукции. Пусть $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где $\beta_1, \beta_2 \in \Delta_+$. Заметим, что никакое из множеств $\mathrm{Supp}\ \beta_1$, $\mathrm{Supp}\ \beta_2$ не совпадает с $\{\alpha_i\}$, потому что иначе один из корней β_1, β_2 совпадал бы с α_i, что невозможно, так как $\beta - \alpha_i$ не является корнем. Следовательно, $r_{\alpha_0}(\beta_1), r_{\alpha_0}(\beta_2) \in \Delta_+ \backslash \{\alpha_0\}$ и $\alpha = r_{\alpha_0}(\beta_1) + r_{\alpha_0}(\beta_2)$ — представление корня α в виде суммы двух положительных корней. Обратно, если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_+ \backslash \{\alpha_0\}$, то $\mathrm{Supp}\ \alpha_1 \neq \{\alpha_0\}$ и $\mathrm{Supp}\ \alpha_2 \neq \{\alpha_0\}$, откуда $r_{\alpha_0}(\alpha_1), r_{\alpha_0}(\alpha_2) \in \Delta_+$ и $\beta = r_{\alpha_0}(\alpha_1) + r_i(\alpha_2)$ — представление корня β в виде суммы двух положительных корней. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между представлениями корня β в виде суммы двух положительных корней и представлениями корня α в виде суммы двух положительных корней, отличных от α_0. Учитывая представление $\alpha = \alpha_0 + \beta$, получаем $s(\alpha) = s(\beta) + 1 = \mathrm{ht}\,\alpha - 1$.

Теперь докажем (б). Снова воспользуемся индукцией по $\mathrm{ht}\,\alpha$. При $\mathrm{ht}\,\alpha = 1$ утверждение справедливо. Предположим, что $\mathrm{ht}\,\alpha = k$ и утверждение доказано для всех корней $\alpha' \in \Delta_+$ с условием $\mathrm{ht}\,\alpha' < k$. Рассмотрим произвольный простой корень α_0, для которого $\beta = \alpha - \alpha_0 \in \Delta_+$. Положим $\gamma = r_{\alpha_0}(\alpha)$. Имеем $\mathrm{ht}\,\gamma < \mathrm{ht}\,\alpha$, поэтому для корня γ выполнено предположение индукции. А именно, $s(\gamma) \geqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha| - 2$ при $\alpha_0 \notin \mathrm{Supp}\ \gamma$ и $s(\gamma) \geqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha| - 1$ при $\alpha_0 \in \mathrm{Supp}\ \gamma$. В любом случае количество представлений вида $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, где $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta_+ \backslash \{\alpha_0\}$, не меньше, чем $|\mathrm{Supp}\ \alpha| - 2$. Для каждого такого представления имеем $r_{\alpha_0}(\gamma_1), r_{\alpha_0}(\gamma_2) \in \Delta_+ \backslash \{\alpha_0\}$, поэтому $\alpha = r_{\alpha_0}(\gamma_1) + r_{\alpha_0}(\gamma_2)$ — представление корня α в виде суммы двух положительных корней. Учитывая представление $\alpha = \beta + \alpha_0$, получаем $s(\alpha) \geqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha| - 1$. $\square$

Лемма 7. *Пусть* α *— активный корень. Тогда:*

(а) $|F(\alpha)| = |\mathrm{Supp}\ \alpha|$*;*

(б) *все веса* $\tau(\beta)$*, где* $\beta \in \mathrm{Supp}\ \alpha$*, линейно независимы;*

(в) $\langle F(\alpha) \rangle = \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \rangle$*;*

(г) *если* $\beta \in \Delta_+$*,* $\mathrm{Supp}\ \beta \subset \mathrm{Supp}\ \alpha$ *и* $\alpha - \beta \notin \Delta_+$*, то корень* β *не является активным.*

Доказательство. По лемме 6 имеем $|F(\alpha)| \geqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha|$. В силу леммы 5 все веса $\tau(\gamma)$, где $\gamma \in F(\alpha)$, различны и по теореме 1 линейно независимы. Но эти веса лежат в подпространстве $\tau(\langle \mathrm{Supp}\ \alpha \rangle) \subset \mathfrak{X}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ размерности не более $|\mathrm{Supp}\ \alpha|$, поэтому $|F(\alpha)| \leqslant |\mathrm{Supp}\ \alpha|$. Отсюда следуют утверждения (а), (б) и (в).

Теперь докажем (г). Пусть $\beta \in \Delta_+$, $\mathrm{Supp}\ \beta \subset \mathrm{Supp}\ \alpha$ и $\alpha - \beta \notin \Delta_+$. Тогда из (б) получаем, что $\tau(\beta) \neq \tau(\gamma)$ для всех $\gamma \in F(\alpha)$. Если бы корень был активным, то по теореме 1 все веса из множества $\{\tau(\beta)\} \cup \{\tau(\gamma) \mid \gamma \in F(\alpha)\}$ были бы линейно независимы, что невозможно в силу (в). Значит, корень β не является активным. $\square$

Следствие 4. *Пусть α — активный корень. Тогда:*
(а) *если $\beta \in \Psi$ и $\operatorname{Supp} \beta \subset \operatorname{Supp} \alpha$, то $\beta \in F(\alpha)$;*
(б) *если $\beta \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, то $F(\beta) \subset F(\alpha)$.*

Доказательство. В условиях пункта (а) по лемме 7(г) получаем $\alpha - \beta \in \Delta_+$, откуда $\beta \in F(\alpha)$. Импликация (а)$\Rightarrow$(б) очевидна. $\square$

Следствие 5. *Пусть $\Psi_i \prec \Psi_j$ при некоторых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Тогда $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых p, q, r с условиями $\Psi_p \prec\!\!\prec \Psi_q$, $\Psi_q \prec\!\!\prec \Psi_r$ имеем $\Psi_p \prec\!\!\prec \Psi_r$. По определению частичного порядка на $\widetilde{\Psi}$ существуют корни $\gamma_{pq}, \gamma_{qr} \in \Delta_+$, такие что $\Psi_p + \gamma_{pq} \subset \Psi_q$ и $\Psi_q + \gamma_{qr} \subset \Psi_r$. Рассмотрим произвольный корень $\alpha \in \Psi_p$. Тогда имеем $\alpha + \gamma_{pq} \in \Psi$, $\alpha + \gamma_{pq} + \gamma_{qr} \in \Psi$, $\alpha \in F(\alpha + \gamma_{pq})$ и $\alpha + \gamma_{pq} \in F(\alpha + \gamma_{pq} + \gamma_{qr})$. По следствию 4 получаем, что $\alpha \in F(\alpha + \gamma_{pq} + \gamma_{qr})$. Значит, $\gamma_{pq} + \gamma_{qr} \in \Delta_+$, откуда по предложению 1 имеем $\Psi_p + (\gamma_{pq} + \gamma_{qr}) \subset \Psi_r$, т. е. $\Psi_p \prec\!\!\prec \Psi_r$. $\square$

Предложение 3. *Пусть α — активный корень. Тогда существует единственный простой корень $\pi(\alpha) \in \operatorname{Supp} \alpha$, обладающий следующим свойством: если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ для некоторых корней $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_+$, то из двух корней α_1, α_2 активным является тот и только тот, носитель которого не содержит $\pi(\alpha)$.*

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по $\operatorname{ht} \alpha$. Если $\operatorname{ht} \alpha = 1$, то $\alpha \in \Pi$ и в качестве $\pi(\alpha)$ можно взять α. Теперь предположим, что $\operatorname{ht} \alpha = k$ и утверждение доказано для всех активных корней высоты не более $k - 1$. Предположим, что требуемого корня $\pi(\alpha)$ не существует. Каждому простому корню $\gamma \in \operatorname{Supp} \alpha$ сопоставим активный корень $\gamma' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, такой что $\gamma \in \operatorname{Supp} \gamma'$ и высота корня γ' минимальна. Тогда в силу выбора корня γ' и применённого к нему предположения индукции имеем $\gamma = \pi(\gamma')$. Из единственности корня $\pi(\gamma')$ получаем, что различным корням $\gamma_1, \gamma_2 \in \operatorname{Supp} \alpha$ отвечают различные корни $\gamma_1', \gamma_2' \in F(\alpha)$. Таким образом, $|F(\alpha)| \geqslant |\operatorname{Supp} \alpha| + 1$, что противоречит лемме 7(а). Значит, корень $\pi(\alpha)$ с нужными свойствами существует. Если существует ещё один такой простой корень $\pi'(\alpha) \neq \pi(\alpha)$, то линейно независимое по следствию 3 множество $F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, состоящее из $|\operatorname{Supp} \alpha| - 1$ элементов, содержится в подпространстве $\big\langle (\operatorname{Supp} \alpha) \backslash \{\pi(\alpha), \pi'(\alpha)\} \big\rangle$ размерности $|\operatorname{Supp} \alpha| - 2$, что невозможно. Таким образом, корень $\pi(\alpha)$ определён однозначно. $\square$

Следствие 6. *Для всякого активного корня α семейство активных корней $F(\alpha)$ однозначно определяется простым корнем $\pi(\alpha)$.*

Следствие 7. *Если α — активный корень, то отображение $\pi \colon F(\alpha) \to \operatorname{Supp} \alpha$ является биекцией.*

Доказательство. Каждому простому корню $\beta \in \operatorname{Supp} \alpha$ сопоставим (любой, если их несколько) корень $\rho(\beta) \in F(\alpha)$ минимальной высоты, такой что $\beta \in \operatorname{Supp} \rho(\beta)$. Тогда по предложению 3, применённому к активному корню $\rho(\beta)$, получаем $\beta = \pi(\rho(\beta))$, поэтому отображение π сюръективно. Но $|F(\alpha)| = |\operatorname{Supp} \alpha|$ в силу леммы 7(а), откуда π — биекция. $\square$

Определение 5. Если α — активный корень, то корень $\pi(\alpha) \in \Pi$ из предложения 3 назовём *простым корнем, ассоциированным с активным корнем α.*

Теорема 3 (Классификация активных корней). *Пусть α — активный корень, $\pi(\alpha)$ — ассоциированный с ним простой корень. Тогда все возможности для α и $\pi(\alpha)$ указаны в таблице 1.*

Таблица 1.

№	тип $\Delta(\alpha)$	α	$\pi(\alpha)$
1	любой ранга n	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$	$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$
2	B_n	$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}+2\alpha_n$	$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$
3	C_n	$2\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n$	α_n
4	F_4	$2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$	α_3,α_4
5	G_2	$2\alpha_1+\alpha_2$	α_2
6	G_2	$3\alpha_1+\alpha_2$	α_2

Эту теорему мы докажем чуть ниже, а сейчас поясним обозначения в таблице 1. В столбце «α» даётся выражение корня α в виде суммы простых корней из $\mathrm{Supp}\ \alpha$. При этом простой корень, имеющий номер j в схеме Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha$ (нумерация простых корней такая же, как в книге [9]), обозначается через α_j. В столбце «$\pi(\alpha)$» перечислены все возможности для $\pi(\alpha)$ при заданном активном корне α.

Доказательство теоремы 3. Если $\Delta(\alpha)$ — система корней типа A, D или E, то в силу лемм 6 и 7 корень α равен сумме простых корней из своего носителя.

Если же система корней $\Delta(\alpha)$ имеет один из типов $\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{F},\mathrm{G}$, то по лемме 7(a) получаем $s(\alpha)=|\mathrm{Supp}\ (\alpha)|-1$. Перебором несложно установить, что это равенство выполняется для ровно двух корней с полным носителем в системах корней типа $\mathrm{B}_n,\mathrm{C}_n,\mathrm{F}_4$ и ровно трёх корней с полным носителем в системе корней G_2. Все эти корни содержатся в таблице 1. Для каждой из строк 2–5 этой таблицы рассмотрим корень $\beta=\sum\limits_{\gamma\in\mathrm{Supp}\ \alpha}\gamma\in\Delta_+$. Имеем $\alpha-\beta\in\Delta_+$, поэтому корень α представляется в виде суммы двух положительных корней как $\alpha=\beta+(\alpha-\beta)$. Отсюда следует, что $\pi(\alpha)\notin\mathrm{Supp}\ (\alpha-\beta)$. Для корня α из строки 6 таблицы 1 имеется представление $\alpha=\alpha_1+(2\alpha_1+\alpha_2)$ в виде суммы двух положительных корней, откуда $\pi(\alpha)\neq\alpha_1$. Таким образом, для каждого корня α из строк 2–6 таблицы 1 мы получили подмножество множества $\mathrm{Supp}\ \alpha$, заведомо не содержащее корня $\pi(\alpha)$. Все оставшиеся возможности для $\pi(\alpha)$ приведены в каждом случае в столбце «$\pi(\alpha)$». $\square$

Замечание 1. Ниже в § 4 мы покажем, что все возможности, представленные в таблице 1, реализуются.

Чтобы сформулировать некоторые следствия теоремы 3, введём одно понятие.

Определение 6. Пусть α — активный корень. Простой корень $\alpha'\in\mathrm{Supp}\ \alpha$ назовём *крайним для* $\mathrm{Supp}\ \alpha$, если в схеме Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha$ вершина α' соединена ребром (возможно, кратным) ровно с одной вершиной.

Несложным перебором всех возможностей из таблицы 1 получаются следующие три утверждения.

Следствие 8. *Если α — активный корень и $\alpha'\in\mathrm{Supp}\ \alpha\cap F(\alpha)$, то корень α' является крайним для* $\mathrm{Supp}\ \alpha$.

Следствие 9. *Если α — активный корень и простой корень $\alpha'\in\mathrm{Supp}\ \alpha$ является крайним для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, то либо $\alpha'=\pi(\alpha)$, либо $\alpha'\in F(\alpha)$.*

Следствие 10. *Пусть α,α' — активные корни, причём $\alpha'\in F(\alpha)$, простой корень $\pi(\alpha)$ является крайним для $\mathrm{Supp}\ \alpha$ и в схеме Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha$ вершина $\pi(\alpha')$ соединена ребром с вершиной $\pi(\alpha)$. Тогда* $\mathrm{Supp}\ \alpha=\{\pi(\alpha)\}\cup\mathrm{Supp}\ \alpha'$.

3.2. В этом пункте мы выясним, как могут пересекаться носители двух различных максимальных активных корней. Основными результатами пункта являются предложения 4 и 5.

Лемма 8. *Пусть α, β — различные максимальные активные корни, причём $\tau(\alpha) \neq \neq \tau(\beta)$. Пусть $\alpha' \in F(\alpha)$, $\beta' \in F(\beta)$ и $\alpha' \neq \beta'$. Тогда $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$.*

Доказательство. Если $\alpha' = \alpha$ и $\beta' = \beta$, то доказывать нечего. Поэтому без ограничения общности считаем, что $\alpha' \neq \alpha$ и $\alpha = \alpha' + \alpha''$ для некоторого $\alpha'' \in \Delta_+$. Предположим, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Если $\beta' = \beta$, то по предложению 1 получаем, что $\beta' + \alpha'' = \beta + \alpha''$ — активный корень, а это противоречит максимальности корня β. Поэтому далее считаем, что $\beta' \neq \beta$ и $\beta = \beta' + \beta''$ для некоторого $\beta'' \in \Delta_+$. Снова по предложению 1 получаем, что $\alpha' + \beta''$ и $\beta' + \alpha''$ — активные корни, причём $\tau(\alpha' + \beta'') = \tau(\beta)$ и $\tau(\beta' + \alpha'') = \tau(\alpha)$. Тогда по лемме 3 (различные) корни $\alpha, \beta' + \alpha'', \beta, \alpha' + \beta''$ образуют между собой попарно неострые углы и поэтому линейно независимы. С другой стороны, между ними имеется линейная зависимость $\alpha + \beta = (\beta' + \alpha'') + (\alpha' + \beta'')$. Полученное противоречие доказывает, что $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$. $\square$

Лемма 9. *Пусть α, β — различные максимальные активные корни, причём $\tau(\alpha) \neq \neq \tau(\beta)$. Тогда оба простых корня $\pi(\alpha), \pi(\beta)$ не лежат во множестве $\mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\pi(\alpha) \notin \mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$. Предположим противное. Положим $a = |\mathrm{Supp}\ \alpha|$, $b = |\mathrm{Supp}\ \beta|$, $c = |\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta|$. По лемме 7 во множестве $\{\gamma \in F(\alpha) \mid \pi(\gamma) \in \mathrm{Supp}\ \alpha \backslash \mathrm{Supp}\ \beta\}$ имеется по меньшей мере $a - c$ корней. Ясно, что все эти корни, а также корень α, не содержатся в семействе $F(\beta)$. Значит, всего различных корней во множестве $F(\alpha) \cup F(\beta)$ не меньше, чем $a - c + 1 + b$ штук. По леммам 5 и 8 получаем, что веса относительно S всех корней из $F(\alpha) \cup F(\beta)$ различны и по теореме 1 линейно независимы. Отсюда размерность подпространства $\langle F(\alpha) \cup F(\beta) \rangle$ не меньше, чем $a+b-c+1$. С другой стороны, это пространство содержится в подпространстве $\langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \rangle$ размерности $a + b - c$, и мы получаем противоречие. $\square$

Следствие 11. *Пусть α, β — различные максимальные активные корни и $\pi(\alpha) \in \in \mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.*

Ниже мы приводим список из нескольких условий на пару активных корней α, β. Эти условия будут использованы при формулировке предложений 4 и 5.

(D0) $\mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta = \varnothing$;

(D1) $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta = \{\delta\}$, где $\pi(\alpha) \neq \delta$, $\pi(\beta) \neq \delta$ и корень δ является крайним для $\mathrm{Supp}\, \alpha$ и $\mathrm{Supp}\, \beta$;

(E1) $\mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta = \{\gamma\}$, где $\gamma = \pi(\alpha) = \pi(\beta)$, $\alpha - \gamma \in \in \Delta_+$, $\beta - \gamma \in \Delta_+$ и корень γ является крайним для $\mathrm{Supp}\, \alpha$ и $\mathrm{Supp}\, \beta$;

(D2) схема Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha \cup \cup \mathrm{Supp}\ \beta$ имеет такой вид, как на рисунке 1 (где $p, q, r \geqslant 1$ — некоторые числа), причём $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\pi(\alpha) \notin \mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta$ и $\pi(\beta) \notin \mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta$;

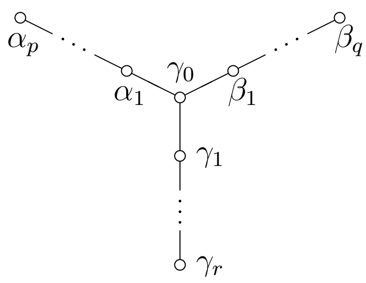

Рис. 1.

(E2) схема Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha \cup \cup \mathrm{Supp}\ \beta$ имеет такой вид, как на рисунке 1 (где $p, q, r \geqslant 1$ — некоторые числа), причём $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta) \in \in \mathrm{Supp}\, \alpha \cap \mathrm{Supp}\, \beta$.

Отметим, что в силу следствия 9 в условии (D1) корень δ является активным.

Предложение 4. *Пусть α, β — различные максимальные активные корни, причём $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$. Тогда реализуется ровно одна из возможностей* (D0)*,* (D1)*,* (D2).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\Delta = \Delta \cap \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \rangle$. Введём обозначение $I = \mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$. Предположим, что возможность (D0) не реализуется и $I \neq \varnothing$. Тогда существует вершина $\delta \in I$, которая соединена ребром с какой-либо из вершин, содержащихся в $\mathrm{Supp}\ \alpha \backslash I$ (последнее множество непусто в силу максимальности корня α и следствия 4(a)). Далее возможны два случая.

Случай 1. Корень δ является крайним для $\mathrm{Supp}\ \alpha$ или для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Тогда по следствию 9 и лемме 9 корень δ является активным. В силу следствия 8 получаем, что корень δ является крайним и для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, и для $\mathrm{Supp}\ \beta$, поэтому $I = \{\delta\}$ и имеет место условие (D1).

Случай 2. Корнеь δ не является крайним ни для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, ни для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Так как ситуация симметрична относительно перестановки α и β, то мы можем считать, что выполнено следующее дополнительное условие: всякая вершина из I, соединённая ребром с какой-либо вершиной из $(\mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta) \backslash I$, не является крайней ни для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, ни для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Из этого условия вытекает, что в схеме Дынкина системы простых корней Π вершина δ имеет степень 3, а сама схема имеет вид, изображённый на рисунке 1 (для некоторых $p, q, r \geqslant 1$), причём $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\delta = \gamma_0$. По лемме 9 оба простых корня $\pi(\alpha), \pi(\beta)$ не лежат в I, поэтому выполнено условие (D2). $\square$

Лемма 10. *Пусть α, β — различные активные корни и $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$.*

Доказательство. Положим $\delta = \pi(\alpha) = \pi(\beta)$. В силу следствия 7 имеем $\alpha \notin F(\beta)$ и $\beta \notin F(\alpha)$. Положим $a = |\mathrm{Supp}\ \alpha|$, $b = |\mathrm{Supp}\ \beta|$, $c = |\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta|$. Предположим, что $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$. Рассмотрим множество $A = F(\alpha) \cup \{\beta\} \cup \{\gamma \in F(\beta) \mid \pi(\gamma) \in \mathrm{Supp}\ \beta \backslash \mathrm{Supp}\ \alpha\}$. Это множество состоит из ровно $a + b - c + 1$ различных элементов. Если $\dim \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \rangle = a + b - c$, то веса относительно тора S всех элементов из A различны, а потому линейно независимы (теорема 1). Последнее невозможно, так как $A \subset \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \rangle$. Значит, $\dim \langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \rangle \leqslant a + b - c - 1$ и во множестве A найдутся по меньшей мере две пары элементов с одинаковыми весами относительно тора S. Возможны два случая.

Случай 1. Нашлись такие корни $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$ и $\beta' \in A \cap F(\beta) \backslash \{\beta\}$, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta')$ и $\tau(\beta) = \tau(\alpha')$. Пусть числа $i, j \in \{1, \ldots, K\}$ таковы, что $\alpha \in \Psi_i$ и $\beta \in \Psi_j$. Тогда имеем $\Psi_i \prec\!\!\prec \Psi_j$ и $\Psi_j \prec\!\!\prec \Psi_i$, откуда $\Psi_i = \Psi_j$ и $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ — противоречие.

Случай 2. Нашлись такие корни $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$ и $\beta' \in A \cap F(\beta) \backslash \{\beta\}$, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Отметим, что $\alpha' \neq \beta'$. Пусть корни $\alpha'', \beta'' \in \Delta_+$ таковы, что $\alpha = \alpha' + \alpha''$ и $\beta = \beta' + \beta''$. Тогда по предложению 1 имеем $\alpha' + \beta'', \beta' + \alpha'' \in \Psi$, причём $\tau(\alpha' + \beta'') = \tau(\beta)$, $\tau(\beta' + \alpha'') = \tau(\alpha)$. Так как $\alpha' \neq \beta'$ и $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$, то все четыре корня $\alpha, \beta, \alpha' + \beta'', \beta' + \alpha''$ попарно различны. По следствию 1 корни $\alpha' + \beta''$ и β, так же как и корни $\beta' + \alpha''$ и α, образуют между собой неострые углы. Далее, корни α и β также образуют между собой неострый угол, так как иначе их разность являлась бы корнем и мы имели бы $\alpha \in F(\beta)$ или $\beta \in F(\alpha)$, откуда $\pi(\alpha) \neq \pi(\beta)$ (следствие 7), что не так. Предположим, что острый угол образуют между собой корни $\alpha' + \beta''$ и α или корни $\beta' + \alpha''$ и β. Меняя при необходимости местами α и β, будем считать, что острым является угол между корнями $\alpha' + \beta''$ и α. Тогда $\rho = \alpha - (\alpha' + \beta'') = \alpha'' - \beta'' \in \Delta$. Снова в силу симметрии относительно перестановки α и β мы можем считать, что $\rho \in \Delta_+$. Тогда имеем $\beta = (\beta' + \alpha'') + \rho$, откуда $\beta' + \alpha'' \in F(\beta)$, $\delta = \pi(\beta) \notin \mathrm{Supp}\ (\beta' + \alpha'')$ и $\delta \notin \mathrm{Supp}\ \alpha''$. С другой стороны, $\alpha = \alpha' + \alpha''$, и поэтому

$\delta = \pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\,\alpha''$. Полученное противоречие показывает, что неострыми являются угол между корнями $\alpha' + \beta''$ и α, а также угол между корнями $\beta' + \alpha''$ и β. Теперь докажем, что корни $\alpha' + \beta''$ и $\beta' + \alpha''$ образуют между собой неострый угол. Если это не так, то $\rho = \alpha' + \beta'' - \beta' - \alpha'' \in \Delta$. В очередной раз мы можем считать, что $\rho \in \Delta_+$. Тогда по предложению 1 имеем $\alpha + \rho = 2(\alpha' + \beta'') - \beta \in \Psi$, причём $\tau(\alpha + \rho) = \tau(\beta) = \tau(\alpha' + \beta'')$. Корни $\alpha + \rho$, β и $\alpha' + \beta''$ попарно различны и по следствию 1 должны быть линейно независимы, что не так. В качестве итога предшествующих рассуждений мы получили, что четыре корня $\alpha, \beta, \alpha' + \beta'', \beta' + \alpha''$ попарно различны и образуют между собой попарно неострые углы. Значит, по лемме 1 эти корни линейно независимы. С другой стороны, между ними имеется линейная зависимость $\alpha + \beta = (\alpha' + \beta'') + (\beta' + \alpha'')$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Следствие 12. *Пусть различные активные корни α, β таковы, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta$. Тогда $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$.*

Доказательство. По следствию 7 существует корень $\beta' \in F(\beta)$, такой что $\pi(\beta') = \pi(\alpha)$. Тогда в силу леммы 10 имеем $\tau(\beta') = \tau(\alpha) = \tau(\beta)$. По лемме 5 получаем $\beta' = \beta$. $\square$

Лемма 11. *Пусть α, β — различные активные корни, причём $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Пусть $\alpha' \in F(\alpha)$, $\beta' \in F(\beta)$, $\alpha' \neq \beta'$ и $\alpha - \alpha' \neq \beta - \beta'$. Тогда $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$.*

Доказательство. Если $\alpha' = \alpha$ или $\beta' = \beta$, то требуемое вытекает из леммы 5. Поэтому далее считаем, что $\alpha' \neq \alpha$ и $\beta' \neq \beta$. Тогда имеем $\alpha = \alpha' + \alpha''$, $\beta = \beta' + \beta''$ для некоторых корней $\alpha'', \beta'' \in \Delta_+$, причём $\alpha'' \neq \beta''$ по условию. Предположим, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Тогда по предложению 1 получаем, что $\alpha' + \beta''$ и $\beta' + \alpha''$ — активные корни, причём $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = \tau(\alpha' + \beta'') = \tau(\beta' + \alpha'')$. Кроме того, из условий $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$ и $\alpha'' \neq \beta''$ следует, что среди корней $\alpha, \beta, \alpha' + \beta'', \beta' + \alpha''$ любые два различны, за исключением, быть может, корней $\alpha' + \beta''$ и $\beta' + \alpha''$. В любом случае по следствию 1 все (различные) корни из множества $\{\alpha, \beta, \alpha' + \beta'', \beta' + \alpha''\}$ (оно состоит из трёх или четырёх элементов) линейно независимы. С другой стороны, между этими корнями имеется линейная зависимость $\alpha + \beta = (\beta' + \alpha'') + (\alpha' + \beta'')$. Мы получили противоречие, откуда $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$. $\square$

Следствие 13. *Пусть α, β — различные активные корни и $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Пусть $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, $\beta' \in F(\beta) \backslash \{\beta\}$, $\alpha' \neq \beta'$ и $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Тогда существует корень $\gamma \in \Delta_+$, такой что $\alpha = \alpha' + \gamma$ и $\beta = \beta' + \gamma$.*

Лемма 12. *Пусть α, β — различные активные корни и $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Предположим, что $\mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta = \{\gamma\}$, где $\gamma = \pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда $\alpha - \gamma \in F(\alpha)$, $\beta - \gamma \in F(\beta)$.*

Доказательство. Из условия следует, что $F(\alpha) \cap F(\beta) = \varnothing$. Предположим, что для любых двух корней $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, $\beta' \in F(\beta) \backslash \{\beta\}$ выполняется условие $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$. Тогда с учётом леммы 5 при ограничении корней из $F(\alpha) \cup F(\beta)$ на тор S получается ровно $|F(\alpha)| + |F(\beta)| - 1$ различных весов. По теореме 1 все эти веса линейно независимы и порождают подпространство $\Omega \subset \mathfrak{X}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ размерности $|F(\alpha)| + |F(\beta)| - 1$, равной $|\mathrm{Supp}\,\alpha| + |\mathrm{Supp}\,\beta| - 1$ по лемме 7(а). С другой стороны, подпространство Ω содержится в подпространстве Ω', порождённом ограничениями на тор S корней из $\mathrm{Supp}\,\alpha \cup \mathrm{Supp}\,\beta$. Подпространство Ω' порождается $|\mathrm{Supp}\,\alpha| + |\mathrm{Supp}\,\beta| - 1$ элементами, между которыми имеется нетривиальное соотношение $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Поэтому $\dim \Omega' \leqslant |\mathrm{Supp}\,\alpha| + |\mathrm{Supp}\,\beta| - 2$ — противоречие. Значит, существуют корни $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$, $\beta' \in F(\beta) \backslash \{\beta\}$, для которых $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Тогда по следствию 13 существует корень $\delta \in \Delta_+$, такой что $\alpha = \alpha' + \delta$ и $\beta = \beta' + \delta$. Из последних равенств следует, что $\mathrm{Supp}\,\delta \subset \mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta = \{\gamma\}$. Отсюда $\delta = \gamma$, $\alpha - \gamma = \alpha' \in F(\alpha)$, $\beta - \gamma = \beta' \in F(\beta)$. $\square$

Предложение 5. *Пусть α, β — различные активные корни, причём $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Тогда реализуется ровно одна из возможностей* (D0), (D1), (E1), (D2), (E2).

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $\Delta = \Delta \cap \big\langle \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta \big\rangle$. Введём обозначение $I = \mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$. Предположим, что возможность (D0) не реализуется и $I \neq \varnothing$. Тогда существует вершина $\delta \in I$, которая соединена ребром с какой-либо из вершин, содержащихся в $\mathrm{Supp}\ \alpha \backslash I$ (последнее множество непусто по следствию 4(а) и лемме 5(а)). Далее возможны три случая.

Случай 1. Корень δ является крайним для $\mathrm{Supp}\ \alpha$. Тогда $I = \{\delta\}$. По следствию 9 корень δ является либо активным корнем, либо корнем, ассоциированным с α. Если δ — активный корень, то по следствию 8 корень δ является крайним для $\mathrm{Supp}\ \beta$, и мы имеем (D1). Если $\delta = \pi(\alpha)$, то по следствию 12 и лемме 12 получаем, что $\delta = \pi(\beta)$, $\alpha - \delta \in F(\alpha)$ и $\beta - \delta \in F(\beta)$. Теперь покажем, что δ — крайний корень для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Рассмотрим степень d вершины δ в схеме Дынкина системы простых корней Π. Если $d = 2$, то вершина δ автоматически крайняя. Если $d = 3$, то из классификации активных корней получаем, что корень β равен сумме всех корней из $\mathrm{Supp}\ \beta$. Но тогда носитель корня $\beta - \delta$ несвязен, а это невозможно. Значит, $d = 2$, вершина δ крайняя для $\mathrm{Supp}\ \beta$ и реализуется возможность (E1).

Случай 2. Корень δ не является крайним для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, но является крайним для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Если $I = \{\delta\}$, то мы можем поменять местами α и β и рассматривать случай 1. Поэтому считаем, что $I \neq \{\delta\}$. Обозначим через δ' вершину схемы Дынкина системы простых корней I, соединённую ребром с вершиной δ. В силу следствий 8, 9 и 12 имеем $\delta = \pi(\beta) = \pi(\alpha)$. Пусть корни $\alpha' \in F(\alpha)\backslash\{\alpha\}$ и $\beta' \in F(\beta)\backslash\{\beta\}$ таковы, что $\pi(\alpha') = \pi(\beta') = \delta$. По лемме 10 получаем, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Если $\alpha' \neq \beta'$, то в силу следствия 13 имеем $\alpha - \alpha' = \beta - \beta'$ и, в частности, $\mathrm{Supp}\ (\alpha - \alpha') \subset I$. Но последнее невозможно, так как множество $\mathrm{Supp}\ (\alpha - \alpha')$ содержит как вершину δ, так и соединённую с ней ребром вершину множества $\mathrm{Supp}\ \alpha \backslash I$. Если же $\alpha' = \beta'$, то с учётом следствия 10 получаем, что $\mathrm{Supp}\ \beta \subset I$, что также невозможно.

Случай 3. Корень δ не является крайним ни для $\mathrm{Supp}\ \alpha$, ни для $\mathrm{Supp}\ \beta$. Дословно повторяя рассуждения случая 2 доказательства предложения 4, мы получаем, что схема Дынкина системы простых корней Π имеет вид, изображённый на рисунке 1 (для некоторых $p, q, r \geqslant 1$), причём $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\delta = \gamma_0$. В этой ситуации с учётом следствия 12 получаем, что имеет место одна из возможностей (D2) или (E2). $\square$

3.3. Основной целью этого пункта является доказательство следующего предложения.

Предложение 6. *Пусть α — максимальный активный корень. Тогда существует простой корень $\alpha' \in \mathrm{Supp}\ \alpha$, такой что $\alpha' \notin \mathrm{Supp}\ \beta$ для всякого максимального активного корня $\beta \neq \alpha$.*

Иными словами, носитель максимального активного корня не покрывается целиком носителями других максимальных активных корней.

Прежде чем доказывать это предложение, докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 13. *Пусть различные активные корни α, β таковы, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда:*

(а) *существует единственная вершина $\eta(\alpha, \beta) \in \mathrm{Supp}\ \alpha \backslash \mathrm{Supp}\ \beta$ схемы Дынкина системы простых корней Π, соединённая ребром с вершиной из $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$;*

(б) *если корень $\alpha' \in F(\alpha)$ таков, что $\pi(\alpha') = \eta(\alpha, \beta)$, то существует корень $\beta' \in F(\beta)$ с условием $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$.*

Доказательство. Из предложения 5 следует, что для α, β реализуется ровно одна из возможностей (E1) или (E2). Легко видеть, что в обоих случаях утверждение (а) справедливо. Докажем утверждение (б). Рассмотрим обе возможности по отдельности.

Случай 1. Реализуется возможность (E1). Отметим, что α может быть корнем только из строк 1 или 2 таблицы 1. Обозначим через δ единственный простой корень, содержащийся в $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$. Тогда корень $\alpha' = \alpha - \delta$ является искомым.

Случай 2. Реализуется возможность (E2). Тогда схема Дынкина системы простых корней $\operatorname{Supp}\alpha \cup \operatorname{Supp}\beta$ имеет вид, изображённый на рисунке 1 (для некоторых $p, q, r \geqslant 1$), причём $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \gamma_s$, где $0 \leqslant s \leqslant r$. Тогда, очевидно, $\alpha' = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p$, $\beta' = \beta_1 + \ldots + \beta_q$. $\square$

Лемма 14. *Пусть попарно различные активные корни α, β, γ таковы, что $\tau(\alpha) = \tau(\beta) = \tau(\gamma)$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \pi(\gamma)$. Тогда либо* $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta \subset \operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\gamma$, *либо* $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\gamma \subset \operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$.

Доказательство. В силу предложения 5 для каждой из пар корней α, β и α, γ реализуется одна из возможностей (E1) или (E2). Если хотя бы для одной из этих пар реализуется возможность (E1), то утверждение справедливо. Остаётся заметить, что для обеих из этих пар одновременно возможность (E2) реализовываться не может. $\square$

Лемма 15. *Пусть α — максимальный активный корень. Пусть максимальный активный корень $\beta \neq \alpha$ таков, что $\pi(\alpha) \in \operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$ и множество $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$ максимально по включению. Тогда для всякого максимального активного корня γ, отличного от α, имеем $\eta(\alpha, \beta) \notin \operatorname{Supp}\gamma$.*

Доказательство. В силу следствий 11 и 12 имеем $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Рассмотрим корень $\eta = \eta(\alpha, \beta)$. По определению имеем $\eta \notin \operatorname{Supp}\beta$. Пусть корень $\alpha' \in F(\alpha) \backslash \{\alpha\}$ таков, что $\pi(\alpha') = \eta$. Тогда по лемме 13(б) существует корень $\beta' \in F(\beta) \backslash \{\beta\}$ с условием $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. В силу следствия 13 существует такой корень $\delta \in \Delta_+$, что $\delta = \alpha - \alpha' = \beta - \beta'$.

Предположим, что корень η содержится в носителе некоторого максимального активного корня γ, отличного от α и β. Имеем $\pi(\gamma) \neq \eta$. Рассмотрим корень $\gamma' \in F(\gamma) \backslash \{\gamma\}$, такой что $\pi(\gamma') = \eta$, и положим $\gamma'' = \gamma - \gamma' \in \Delta_+$. По лемме 10 имеем $\tau(\gamma') = \tau(\alpha')$. Если $\gamma'' = \delta$, то $\tau(\gamma) = \tau(\alpha) = \tau(\beta)$, откуда $\pi(\gamma) \in \operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\gamma$ и, по следствию 12, $\pi(\gamma) = \pi(\alpha)$. Так как $\eta \in (\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\gamma) \backslash \operatorname{Supp}\beta$, то по лемме 14 получаем, что $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\gamma \supsetneqq \operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$ — противоречие с выбором β. Значит, $\gamma'' \neq \delta$. Далее, по предложению 1 максимальными активными корнями являются $\alpha' + \gamma'' = \alpha - \delta + \gamma''$, $\beta' + \gamma'' = \beta - \delta + \gamma''$ и $\gamma' + \delta = \gamma - \gamma'' + \delta$. В силу леммы 3 все различные корни из множества $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha' + \gamma'', \beta' + \gamma'', \gamma' + \delta\}$ линейно независимы. Однако между этими корнями имеется соотношение $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha' + \gamma'') + (\beta' + \gamma'') + (\gamma' + \delta)$. Несложно проверить, что корень β не совпадает ни с одним из остальных пяти корней, поэтому рассмотренное соотношение нетривиально. Мы пришли к противоречию, что и доказывает лемму. $\square$

Доказательство предложения 6. Если корень $\pi(\alpha)$ не содержится в носителе никакого максимального корня, отличного от α, то можно взять $\alpha' = \pi(\alpha)$. В противном случае имеем $\pi(\alpha) \in \operatorname{Supp}\beta$ для некоторого максимального активного корня $\beta \neq \alpha$. Без ограничения общности будем считать, что множество $\operatorname{Supp}\alpha \cap \operatorname{Supp}\beta$ максимально по включению. Тогда по лемме 15 в качестве α' можно взять корень $\eta(\alpha, \beta)$. $\square$

3.4. В этом пункте мы укажем условие, связывающее тор S и множество Ψ. Основной результат пункта сформулирован в предложении 7.

Напомним (см. следствие 7), что для всякого активного корня α отображение $\pi\colon F(\alpha) \to$

$\to \mathrm{Supp}\,\alpha$ биективно.

Лемма 16. *Пусть α, β — различные максимальные активные корни. Положим $J = \mathrm{Supp}\,\alpha \backslash \mathrm{Supp}\,\beta$. Тогда:*

(а) *если $\tau(\alpha) \neq \tau(\beta)$, то для всякого корня $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J$ и всякого корня $\beta' \in F(\beta)$ имеем $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$;*

(б) *если $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) \in J$, то для всякого корня $\alpha' \in F(\alpha)\backslash\{\alpha\}$ с условием $\pi(\alpha') \in J$ и всякого корня $\beta' \in F(\beta)$ имеем $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$;*

(в) *если $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ и $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta$, то для всякого корня $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J\backslash\{\eta(\alpha, \beta)\}$ и всякого корня $\beta' \in F(\beta)$ имеем $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta')$.*

Доказательство. Утверждение (а) является прямым следствием леммы 8. Докажем утверждение (б). Пусть корни $\alpha' \in F(\alpha)\backslash\{\alpha\}$ и $\beta \in F(\beta)$ таковы, что $\pi(\alpha') \in J$ и $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Тогда по лемме 11 получаем, что $\delta = \alpha - \alpha' = \beta - \beta' \in \Delta_+$. Отсюда $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\,\delta \subset \mathrm{Supp}\,\alpha\backslash J$ — противоречие. В условиях утверждения (в) по предложению 5 для корней α, β реализуется одна из возможностей (E1) или (E2). В обоих случаях, как нетрудно увидеть, всякий корень $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J\backslash\{\eta(\alpha, \beta)\}$ подчинён корню $\alpha'' \in F(\alpha)$, для которого $\pi(\alpha'') = \eta(\alpha, \beta)$. Предполагая, что $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$ для некоторого корня $\beta' \in F(\beta)$, по лемме 11 получаем, что $\delta = \alpha - \alpha' = \beta - \beta' \in \Delta_+$. Тогда имеем $\eta(\alpha, \beta) \in \mathrm{Supp}\,\delta$, что невозможно в силу условия $\mathrm{Supp}\,\delta \subset \mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta$. $\square$

Обозначим через M множество максимальных активных корней подгруппы H.

Лемма 17. *Пусть $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$ — произвольное подмножество. Положим $l = |\bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}'} \mathrm{Supp}\,\delta|$, $k = |\tau(\bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}'} F(\delta))|$. Тогда:*

(а) $\dim \langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}', \tau(\mu) = \tau(\nu) \rangle = |\mathrm{M}'| - |\tau(\mathrm{M}')|$*;*

(б) $l = k + |\mathrm{M}'| - |\tau(\mathrm{M}')|$.

Доказательство. Оба утверждения докажем одновременно индукцией по $|\mathrm{M}'|$.

При $|\mathrm{M}'| = 1$ имеем $|\mathrm{M}'| = |\tau(\mathrm{M}')|$, утверждение (а), очевидно, верно. Утверждение (б) также верно в силу лемм 5 и 7(а).

Теперь предположим, что утверждения (а) и (б) доказаны для всех собственных подмножеств множества M', и докажем эти утверждения для множества M'. Пусть $\mathrm{M}' = \widetilde{\mathrm{M}}' \cup \{\alpha\}$, где $\alpha \notin \widetilde{\mathrm{M}}'$. Введём обозначение $J = (\mathrm{Supp}\ \alpha)\backslash(\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} \mathrm{Supp}\ \delta)$. Положим $\widetilde{l} = |\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} \mathrm{Supp}\ \delta|$, $\widetilde{k} = |\tau(\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} F(\delta))|$. Ясно, что $|\mathrm{M}'| = |\widetilde{\mathrm{M}}'| + 1$ и $l = \widetilde{l} + |J|$. Отметим следующие два свойства корня α:

(1) если $\alpha', \alpha'' \in F(\alpha)$ — различные корни, то $\tau(\alpha') \neq \tau(\alpha'')$ (см. лемму 5);

(2) если для корня $\alpha' \in F(\alpha)$ оказалось, что $\pi(\alpha') \in \mathrm{Supp}\ \beta$ для некоторого корня $\beta \in \widetilde{\mathrm{M}}'$, то существует корень $\beta' \in F(\beta)$, для которого $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$ (следует из леммы 10).

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Для всякого корня $\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'$ имеем $\tau(\alpha) \neq \tau(\delta)$. Тогда $|\tau(\mathrm{M})| = |\tau(\widetilde{\mathrm{M}}')| + 1$ и подпространство $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \tau(\mu) = \tau(\nu) \rangle$ совпадает с подпространством $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \tau(\mu) = \tau(\nu) \rangle$, которое по предположению индукции имеет размерность $|\widetilde{\mathrm{M}}'| - |\tau(\widetilde{\mathrm{M}}')| = |\mathrm{M}| - |\tau(\mathrm{M})|$. Тем самым доказано утверждение (а). Чтобы доказать утверждение (б), в силу предположения индукции достаточно проверить, что $|J| = k - \widetilde{k}$. По лемме 16(а) для всякого корня $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J$ и любого корня $\beta \in \bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} F(\delta)$ имеем $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta)$. Отсюда с учётом свойств (1) и (2) получаем $|J| = k - \widetilde{k}$.

Случай 2. Существует корень $\alpha_0 \in \widetilde{\mathrm{M}}'$, такой что $\tau(\alpha) = \tau(\alpha_0)$. Тогда имеем $|\tau(\mathrm{M}')| = |\tau(\widetilde{\mathrm{M}}')|$. По предложению 6 существует простой корень $\rho \in \mathrm{Supp}\ \alpha$ с условием $\rho \in J$, поэтому разность $\alpha - \alpha_0$ не лежит в подпространстве $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \tau(\mu) = \tau(\nu)\rangle$. Легко видеть, что подпространство $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \tau(\mu) = \tau(\nu)\rangle$ совпадает с подпространством $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \tau(\mu) = \tau(\nu)\rangle \oplus \langle \alpha - \alpha_0\rangle$, его размерность с учётом предположения индукции равна $|\widetilde{\mathrm{M}}'| - |\tau(\widetilde{\mathrm{M}}')| + 1 = |\mathrm{M}'| - |\tau(\mathrm{M}')|$. Утверждение (а) доказано. Чтобы доказать утверждение (б), в силу предположения индукции достаточно проверить, что $|J| = k - \widetilde{k} + 1$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 2.1. $\pi(\alpha) \in J$. По лемме 16(а,б) для всякого корня $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J \backslash \{\pi(\alpha)\}$ и всякого корня $\beta \in \bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} F(\delta)$ имеем $\tau(\alpha') \neq \tau(\beta)$. Отсюда в силу свойств (1) и (2) получаем $|J| = k - \widetilde{k} + 1$.

Подслучай 2.2. $\pi(\alpha) \notin J$. В этой ситуации существует максимальный активный корень $\beta \neq \alpha$, такой что $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\ \beta$. Без ограничения общности будем считать, что множество $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$ максимально по включению. Тогда по лемме 15 имеем $\eta(\alpha, \beta) \in J$. Пусть корень $\alpha' \in F(\alpha)$ таков, что $\pi(\alpha) = \eta(\alpha, \beta)$. Из леммы 13(б) вытекает существование корня $\beta' \in F(\beta)$, для которого $\tau(\alpha') = \tau(\beta')$. Предположим, что для некоторого корня $\alpha'' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha'') \in J \backslash \{\eta(\alpha, \beta)\}$ существуют такие корни $\gamma \in \widetilde{\mathrm{M}}' \backslash \{\beta\}$ и $\gamma' \in F(\gamma)$, что $\tau(\alpha'') = \tau(\gamma')$. Ясно, что $\alpha'' \neq \gamma'$. Положим $\eta' = \pi(\alpha'')$. Применяя леммы 8 и 11, получаем, что $\tau(\alpha) = \tau(\gamma)$ и $\alpha - \alpha'' = \gamma - \gamma' \in \Delta_+$, откуда $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \gamma$. Тогда по лемме 16(в) получаем $\eta' = \eta(\alpha, \gamma)$. Значит, в схеме Дынкина системы простых корней Π вершина η' соединена ребром с некоторой вершиной множества $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \gamma$. Далее, по следствию 12 имеем $\pi(\alpha) = \pi(\gamma)$. В силу выбора корня β и леммы 14 имеет место включение $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \gamma \subset \mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$. Отсюда получаем, что в схеме Дынкина системы простых корней Π вершина $\eta' \in \mathrm{Supp}\ \alpha \backslash \mathrm{Supp}\ \beta$ соединена с некоторой вершиной множества $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$. Тогда по лемме 13(а) имеем $\eta' = \eta(\alpha, \beta)$, что невозможно. Таким образом, для всякого корня $\alpha'' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') \in J \backslash \{\eta(\alpha, \beta)\}$ и всякого корня $\gamma' \in \bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} F(\delta)$ имеем $\tau(\alpha'') \neq \tau(\gamma')$. Отсюда в силу свойств (1) и (2) получаем $|J| = k - \widetilde{k} + 1$.

Утверждение (б) доказано. $\square$

Предложение 7. *Ядро отображения* $\tau \colon \langle \bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}} \mathrm{Supp}\ \delta \rangle \to \mathfrak{X}(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ *совпадает с подпространством* $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \tau(\mu) = \tau(\nu)\rangle$.

Доказательство. Положим $R = \langle \bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}} \mathrm{Supp}\ \delta \rangle \subset Q$. По теореме 1 размерность образа подпространства R при отображении τ не меньше K. Далее, так как имеется включение $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \tau(\mu) = \tau(\nu)\rangle \subset \mathrm{Ker}\ \tau|_R$, то из леммы 17(а) следует, что $\dim \mathrm{Ker}\ \tau|_R \geqslant |\mathrm{M}| - |\tau(\mathrm{M})|$. Применяя лемму 17(б), получаем $\dim \mathrm{Ker}\ \tau|_R = |\mathrm{M}| - |\tau(\mathrm{M})|$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

3.5. В этом пункте мы подведём итог результатам, полученным в настоящем параграфе, и докажем теорему единственности (см. теорему 4).

Напомним, что в п. 3.4 мы ввели обозначение M для множества максимальных активных корней. Теперь введём отношение $\sim$ на M следующим образом. Для любых двух корней $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ положим $\alpha \sim \beta$ тогда и только тогда, когда $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Очевидно, что это отношение является отношением эквивалентности.

Каждой связной разрешимой сферической подгруппе $H \subset G$, стандартно вложенной в

B, сопоставим набор комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$.

Теорема 4 (Теорема единственности). *Пусть $H \subset G$ — разрешимая сферическая подгруппа, стандартно вложенная в B. Тогда с точностью до сопряжения элементом тора T подгруппа H однозначно определяется своим набором комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, причём этот набор удовлетворяет следующим условиям:*

(A) $\pi(\alpha) \in \operatorname{Supp} \alpha$ *для всякого корня $\alpha \in M$, причём пара $(\alpha, \pi(\alpha))$ содержится в таблице 1;*

(D) *если $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ и $\alpha \nsim \beta$, то для корней α, β реализуется одна из возможностей* (D0), (D1), (D2)*;*

(E) *если $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ и $\alpha \sim \beta$, то для корней α, β реализуется одна из возможностей* (D0), (D1), (E1), (D2), (E2)*;*

(C) *для всякого корня $\alpha \in \mathrm{M}$ выполняется условие* $\operatorname{Supp} \alpha \not\subset \bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M} \setminus \{\alpha\}} \operatorname{Supp} \delta$*;*

(T) $\operatorname{Ker} \tau|_R = \langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \mu \sim \nu \rangle$, *где* $R = \langle \bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}} \operatorname{Supp} \gamma \rangle$.

Доказательство. В силу следствия 6 множество Ψ однозначно определяется парой (M, π). Тогда с учётом теоремы 2 подгруппа H однозначно с точностью до сопряжения элементом тора T определяется тройкой (S, M, π).

Условие (A) следует из определения корня $\pi(\alpha)$ и теоремы 3. Условия (D) и (E) вытекают из предложений 4 и 5 соответственно. Справедливость условия (C) установлена в предложении 6. Наконец, выполнение условия (T) доказано в предложении 7. □

Замечание 2. Набор данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$ является избыточным в том смысле, что отношение $\sim$ однозначно определяется тором S и множеством M. Однако преимущество этого набора заключается в том, что, как мы увидим в § 4, унипотентный радикал N подгруппы H может быть построен по поднабору $(\mathrm{M}, \pi, \sim)$ без использования тора S (см. замечание 4).

Замечание 3. Если две различные разрешимые сферические подгруппы $H_1, H_2 \subset G$, стандартно вложенные в B, сопряжены в G, то им соответствуют, вообще говоря, разные наборы комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$. Поэтому набор $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, вообще говоря, не является инвариантом классов сопряжённости разрешимых сферических подгрупп. Мы вернёмся к этому вопросу в § 5.

§ 4. Теорема существования

В этом параграфе мы покажем, что по всякому набору комбинаторных данных, указанному в формулировке теоремы 4, можно построить разрешимую сферическую подгруппу в G, стандартно вложенную в B, с этим набором комбинаторных данных. А именно, мы докажем следующую теорему.

Теорема 5 (Теорема существования). *Пусть подтор $S \subset T$, подмножество $\mathrm{M} \subset \Delta_+$, отображение $\pi \colon \mathrm{M} \to \Pi$ и отношение эквивалентности $\sim$ на M удовлетворяют условиям* (A), (D), (E), (C) *и* (T). *Тогда существует разрешимая сферическая подгруппа $H \subset G$, стандартно вложенная в B, которой соответствует набор комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$.*

В п. 4.1 приводятся сведения, необходимые для доказательства этой теоремы. Само доказательство проводится в пп. 4.2-4.4.

4.1. Пусть пара (α, α_0), где $\alpha \in \Delta_+$, $\alpha_0 \in \mathrm{Supp}\,\alpha$, такова, что корень α содержится в столбце «α» таблицы 1, а корень α_0 содержится в той же строке в столбце «$\pi(\alpha)$» этой таблицы. Положим

$$F(\alpha) = \{\alpha\} \cup \{\alpha' \in \Delta_+ \mid \alpha - \alpha' \in \Delta_+, \alpha_0 \notin \mathrm{Supp}\,\alpha'\}.$$

Тогда путём несложного перебора можно установить, что выполняются следующие свойства:

(1) *если $\beta \in F(\alpha)$, то корень β содержится в таблице 1;*

(2) *если $\beta \in F(\alpha)$ и $\beta = \beta_1 + \beta_2$ для некоторых корней $\beta_1, \beta_2 \in \Delta_+$, то ровно один из двух корней β_1, β_2 лежит во множестве $F(\alpha)$;*

(3) *для всякого корня $\beta \in F(\alpha)$ имеем $|\{\beta\} \cup \{\beta' \in F(\alpha) \mid \beta - \beta' \in \Delta_+\}| = |\mathrm{Supp}\,\beta|$; в частности, $|F(\alpha)| = |\mathrm{Supp}\,\alpha|$;*

(4) *все корни из множества $F(\alpha)$ линейно независимы (что с учётом условия (3) эквивалентно равенству $\langle F(\alpha)\rangle = \langle \mathrm{Supp}\,\alpha\rangle$).*

4.2. Мы приступаем к доказательству теоремы 5. Пусть набор комбинаторных данных $(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$, где $S \subset T$ — подтор, $\mathrm{M} \subset \Delta_+$ — подмножество, $\pi \colon \mathrm{M} \to \Pi$ — отображение и $\sim$ — отношение эквивалентности на M, удовлетворяет условиям (A), (D), (E), (C) и (T).

По каждой паре $(\alpha, \pi(\alpha))$, где $\alpha \in \mathrm{M}$, постороим множество $F(\alpha)$ так, как указано в п. 4.1, и образуем множество $\Psi = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{M}} F(\alpha)$.

В настоящем пункте мы выведем основные свойства множества Ψ, которые необходимы для доказательства теоремы 5.

Лемма 18. *Пусть корни $\alpha \in \mathrm{M}$ и $\beta \in \Psi$ таковы, что $\mathrm{Supp}\,\beta \subset \mathrm{Supp}\,\alpha$. Тогда $\beta \in F(\alpha)$.*

Доказательство. При $\alpha = \beta$ доказывать нечего, поэтому считаем $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим корень $\widetilde{\beta} \in \mathrm{M}$, для которого $\beta \in F(\widetilde{\beta})$. В силу условия (C) имеем $\beta \neq \widetilde{\beta}$. В силу условий (D) и (E) для корней $\alpha, \widetilde{\beta}$ реализуется одна из возможностей (D1), (E1), (D2) или (E2). Непосредственная проверка в каждом из этих случаев показывает, что утверждение верно. $\square$

Лемма 19. *Пусть $\alpha \in \Psi$ и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ для некоторых корней $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_+$. Тогда из двух корней α_1, α_2 ровно один лежит во множестве Ψ.*

Доказательство. Пусть корень $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{M}$ (возможно, совпадающий с α) таков, что $\alpha \in F(\widetilde{\alpha})$. Тогда по свойству (2) из двух корней α_1, α_2 ровно один лежит во множестве $F(\widetilde{\alpha})$. Пусть, для определённости, $\alpha_1 \in F(\widetilde{\alpha})$. Тогда если $\alpha_2 \in \Psi$, то по лемме 18 получаем $\alpha_2 \in F(\widetilde{\alpha})$, что не так. $\square$

Теперь определим множество $F(\alpha)$ для всех корней $\alpha \in \Psi$: $F(\alpha) = \{\alpha\} \cup \{\alpha' \in \Psi \mid \alpha - \alpha' \in \Delta_+\}$. Для корней $\alpha \in \mathrm{M}$ это определение совпадает с тем, что было дано выше.

Следствие 14. *Пусть $\alpha \in \Psi$ — произвольный корень. Тогда:*

(а) $|F(\alpha)| = |\mathrm{Supp}\,\alpha|$*;*

(б) *все корни из $F(\alpha)$ линейно независимы (что с учётом (а) эквивалентно равенству $\langle F(\alpha)\rangle = \langle \mathrm{Supp}\,\alpha\rangle$).*

Доказательство. Утверждение (а) следует из свойства (3) и леммы 19, утверждение (б) следует из свойства (4). $\square$

Предложение 8. (а) *Пусть $\alpha \in \Psi$. Тогда существует единственный простой корень $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\,\alpha$, обладающий следующим свойством: если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ для некоторых кор-*

ней $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta_+$, то из двух корней α_1, α_2 во множестве Ψ лежит тот и только тот, носитель которого не содержит $\pi(\alpha)$.

(б) *Для всякого корня $\alpha \in \Psi$ отображение $\pi : F(\alpha) \to \mathrm{Supp}\,\alpha$ является биекцией.*

Доказательство утверждений (а) и (б) почти дословно повторяет доказательство соответственно предложения 3 и следствия 7, с той лишь разницей, что ссылки на лемму 7(а) и следствие 3 заменяются ссылками на следствия 14(а) и 14(б) соответственно. □

Таким образом, мы определили отображение π на всём множестве Ψ. Отметим, что на множестве M это отображение совпадает с отображением $\pi\colon \mathrm{M} \to \Pi$, заданным по условию.

Следующий шаг — продолжение отношения эквивалентности $\sim$ на всё множество Ψ. Пусть $\alpha', \beta' \in \Psi\backslash\mathrm{M}$. Будем считать, что $\alpha' \sim \beta'$, если и только если существуют корни $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ и $\delta \in \Delta_+$, такие что $\alpha' \in F(\alpha)$, $\beta' \in F(\beta)$, $\alpha' + \delta = \alpha$ и $\beta' + \delta = \beta$. Ниже мы докажем (см. предложение 9), что это отношение является отношением эквивалентности на множестве $\Psi\backslash\mathrm{M}$. Сейчас мы отметим два простых свойства этого отношения.

Лемма 20. *Пусть $\alpha', \beta' \in \Psi\backslash\mathrm{M}$, $\alpha' \sim \beta'$ и корни $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$, $\delta \in \Delta_+$ таковы, что $\alpha' \in F(\alpha)$, $\beta' \in F(\beta)$, $\alpha' + \delta = \alpha$ и $\beta' + \delta = \beta$. Тогда $\alpha \sim \beta$.*

Доказательство. Так как оба простых корня $\pi(\alpha), \pi(\beta)$ содержатся в $\mathrm{Supp}\,\delta$, то они содержатся в $\mathrm{Supp}\,\alpha \cap \mathrm{Supp}\,\beta$, а это невозможно при $\alpha \not\sim \beta$ в силу условия (D). □

Лемма 21. *Пусть $\alpha', \beta' \in \Psi\backslash\mathrm{M}$, $\alpha' \ne \beta'$ и $\alpha' \sim \beta'$. Тогда существует ровно один корень $\alpha \in \mathrm{M}$ с условием $\alpha' \in F(\alpha)$.*

Доказательство. Выберем такие корни $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$, $\delta \in \Delta_+$, что $\alpha' \in F(\alpha)$, $\beta' \in F(\beta)$, $\alpha' + \delta = \alpha$ и $\beta' + \delta = \beta$. Тогда из условия получаем, что $\alpha \ne \beta$. Предположим, что существует корень $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{M}$, такой что $\widetilde{\alpha} \ne \alpha$ и $\alpha' \in F(\widetilde{\alpha})$. Тогда имеем $\mathrm{Supp}\,\alpha' \subset \mathrm{Supp}\,\widetilde{\alpha}$, $\mathrm{Supp}\,\delta \subset \mathrm{Supp}\,\beta$, откуда $\mathrm{Supp}\,\alpha \subset \mathrm{Supp}\,\widetilde{\alpha} \cup \mathrm{Supp}\,\beta$, что противоречит условию (C). □

Предложение 9. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\Psi\backslash\mathrm{M}$.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения $\sim$ очевидны, поэтому достаточно доказать транзитивность. Пусть $\alpha', \beta', \gamma' \in \Psi\backslash\mathrm{M}$ — различные корни и $\alpha' \sim \beta'$, $\alpha' \sim \gamma'$. Докажем, что $\beta' \sim \gamma'$. Имеем $\alpha = \alpha' + \delta_1$, $\beta = \beta' + \delta_1$, $\widetilde{\alpha} = \alpha' + \delta_2$, $\gamma = \gamma' + \delta_2$ для некоторых корней $\alpha, \beta, \widetilde{\alpha}, \gamma \in \mathrm{M}$ и $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_+$. По лемме 21 получаем, что $\widetilde{\alpha} = \alpha$, откуда $\delta_1 = \delta_2$ и $\beta' \sim \gamma'$. □

Следствие 15. *Пусть $A \subset \Psi\backslash\mathrm{M}$ — класс эквивалентности, содержащий более одного элемента. Тогда:*

(а) *для всякого корня $\alpha' \in A$ существует единственный корень $\alpha \in \mathrm{M}$, такой что $\alpha' \in F(\alpha)$;*

(б) *корень $\delta = \alpha - \alpha'$ один и тот же для всех корней $\alpha' \in A$;*

(в) *$A + \delta \subset \mathrm{M}$, причём все корни из $A + \delta$ попарно эквивалентны.*

Доказательство. Утверждение (а) вытекает из леммы 21, утверждение (б) — из доказательства предложения 9, утверждение (в) — из утверждения (б) и леммы 20. □

Итак, у нас есть отношение эквивалентности на каждом из множеств M, $\Psi\backslash\mathrm{M}$. Доопределим его на всём множестве Ψ, полагая $\alpha \not\sim \beta$ при $\alpha \in \mathrm{M}$, $\beta \in \Psi\backslash\mathrm{M}$ или $\alpha \in \Psi\backslash\mathrm{M}$, $\beta \in \mathrm{M}$. Получим отношение эквивалентности $\sim$ на всём множестве Ψ абстрактных активных корней. Пусть $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_K$ — все классы эквивалентности множества Ψ по отношению $\sim$.

Предложение 10. (а) *Пусть при некоторых $i, j \in \{1, \ldots, K\}$, $i \ne j$, корни $\alpha' \in \Psi_i$ и $\delta \in \Delta_+$ таковы, что $\alpha' + \delta \in \Psi_j$. Тогда $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$.*

(б) *Пусть* $i \in \{1, \ldots, K\}$ *и корни* $\alpha', \alpha'' \in \Psi_i$ *различны. Тогда* $\alpha'' - \alpha' \notin \Delta$.

(в) *Пусть* $i, j \in \{1, \ldots, K\}$, $i \neq j$ *и* $|\Psi_i| \geqslant 2$. *Тогда существует не более одного корня* $\delta \in \Delta_+$, *для которого* $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$.

Доказательство. (а) Если $|\Psi_i| = 1$, то доказывать нечего. Если $\Psi_j \subset \mathrm{M}$, то требуемое вытекает из следствия 15(в). Поэтому далее считаем, что $|\Psi_i| \geqslant 2$ и $\Psi_j \not\subset \mathrm{M}$. Положим $\alpha'' = \alpha' + \delta$, $\alpha'' \in \Psi_j$. Обозначим через α единственный по следствию 15(а) корень из M, для которого $\alpha' \in F(\alpha)$. Пусть $\widetilde{\alpha} \in \mathrm{M}$ — произвольный корень, для которого $\alpha'' \in F(\widetilde{\alpha})$. Тогда $\mathrm{Supp}\ \alpha' \subset \mathrm{Supp}\ \widetilde{\alpha}$, откуда по лемме 18 получаем $\alpha' \in F(\widetilde{\alpha})$ и, в силу следствия 15(а), $\widetilde{\alpha} = \alpha$. Положим $\delta' = \alpha - \alpha' \in \Delta_+$, $\delta'' = \alpha - \alpha'' \in \Delta_+$. Теперь рассмотрим произвольный корень $\beta' \in \Psi_i$ и покажем, что $\beta'' = \beta' + \delta \in \Psi_j$. Обозначим через β единственный по следствию 15(а) корень из M, для которого $\beta' \in F(\beta)$. Из следствия 15(б,в) получаем $\beta = \beta' + \delta'$ и $\alpha \sim \beta$. Далее, имеем $\delta' = \delta + \delta''$, откуда $|\mathrm{Supp}\ \delta'| \geqslant 2$. Кроме того, $\mathrm{Supp}\ \delta' \subset \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta$, причём $\pi(\alpha), \pi(\beta) \in \mathrm{Supp}\ \delta'$. Значит, для корней α, β реализуется возможность (E2). Поэтому схема Дынкина системы простых корней $\mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta$ имеет вид, изображённый на рисунке 1 (для некоторых $p, q, r \geqslant 1$), $\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_p + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\beta = \beta_1 + \ldots + \beta_q + \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_r$, $\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \gamma_s$ для некоторого $s \in \{0, 1, \ldots, r\}$. При этом $\delta' = \gamma_t + \gamma_{t+1} + \ldots + \gamma_r$, где $0 \leqslant t \leqslant s$, и $\delta'' = \gamma_u + \gamma_{u+1} + \ldots + \gamma_r$, где $t < u \leqslant s$. Легко видеть, что $\beta'' = \beta - \delta''$ — корень, причём он лежит в $F(\beta)$. Из условий $\beta'' + \delta'' = \beta$, $\alpha'' + \delta'' = \alpha$ и $\alpha \sim \beta$ следует, что $\alpha'' \sim \beta''$ и $\beta'' \in \Psi_j$, чем и завершается доказательство утверждения (а).

(б) Предположим, что $\delta_0 = \alpha'' - \alpha' \in \Delta$. Без ограничения общности считаем, что $\delta_0 \in \Delta_+$. По следствию 15 существуют единственные корни $\widetilde{\alpha}', \widetilde{\alpha}'' \in \mathrm{M}$, $\delta \in \Delta_+$, для которых $\alpha' \in F(\widetilde{\alpha}')$, $\alpha'' \in F(\widetilde{\alpha}'')$, $\alpha' + \delta = \widetilde{\alpha}'$, $\alpha'' + \delta = \widetilde{\alpha}''$. В силу леммы 18 имеем $\alpha' \in F(\widetilde{\alpha}'')$, что противоречит лемме 15(а).

(в) Если $\Psi_j \subset \mathrm{M}$, то утверждение справедливо в силу следствия 15. Далее считаем, что $\Psi_j \not\subset \mathrm{M}$. Пусть корень δ таков, что $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$. Покажем, что δ однозначно определяется по i и j. По следствию 15 существуют однозначно определённые индексы $k, l \in \{1, \ldots, K\}$ и корни $\delta_i, \delta_j \in \Delta_+$, такие что $\Psi_k, \Psi_l \subset \mathrm{M}$, $\Psi_i + \delta_i \subset \Psi_k$ и $\Psi_j + \delta_j \subset \Psi_l$. В силу утверждения (а) для любого корня $\alpha \in \Psi_i$ имеем $\alpha + \delta \in \Psi_j$, $\alpha + \delta_i \in \Psi_k \subset \mathrm{M}$, $\alpha + \delta + \delta_j \in \Psi_l \subset \mathrm{M}$, откуда по лемме 18 получаем $\alpha \in F(\alpha + \delta + \delta_j)$. Но тогда в силу следствия 15(а) имеем $\alpha + \delta_i = \alpha + \delta + \delta_j$. Следовательно, $\delta = \delta_i - \delta_j$ и корень δ определяется однозначно по i, j. $\square$

4.3. В этом пункте мы построим алгебру $\mathfrak{n}$, которая станет касательной алгеброй унипотентного радикала нашей будущей разрешимой сферической подгруппы.

Положим $\mathfrak{u}_i = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Psi_i} \mathfrak{g}_\alpha$ при $i = 1, \ldots, K$ и $\mathfrak{u}_0 = \bigoplus\limits_{\alpha \notin \Psi} \mathfrak{g}_\alpha$, так что $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0 \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{K} \mathfrak{u}_i$. Каждому подпространству $\mathfrak{u}_i$, $i \in \{1, \ldots, K\}$, сопоставим линейную функцию $\xi_i \colon \mathfrak{u}_i \to \mathbb{C}$ следующим образом. Пусть сначала i таково, что $\Psi_i \subset \mathrm{M}$. Тогда в качестве ξ_i возьмём произвольную линейную функцию, ограничения которой на каждое из корневых подпространств $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Psi_i$, не равно нулю тождественно. Далее, для всех i с условиями $\Psi_i \not\subset \mathrm{M}$ и $|\Psi_i| = 1$ в качестве ξ_i возьмём любую ненулевую линейную функцию на (одномерном) пространстве $\mathfrak{u}_i$. Наконец, если i таково, что $\Psi_i \not\subset \mathrm{M}$ и $|\Psi_i| \geqslant 2$, то поступим следующим образом. По следствию 15 существуют единственное $j \in \{1, \ldots, K\}$ и единственный корень $\delta \in \Delta_+$, такие что $\Psi_j \subset \mathrm{M}$ и $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$. Для всякого $x \in \mathfrak{u}_i$ положим $\xi_i(x) = \xi_j([x, e_\delta])$. Тогда ξ_i — линейная функция на $\mathfrak{u}_i$, причём её ограничение на корневое подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ для любого $\alpha \in \Psi_i$ не равно нулю тождественно.

Лемма 22. *Пусть* $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$, *где индексы* $i, j \in \{1, \ldots, K\}$ *различны, и* $\delta \in \Delta_+$. *Тогда* *существует такое число* $c_{ij} \in \mathbb{C}^\times$, *что* $\xi_i(x) = c_{ij}\xi_j([x, e_\delta])$ *для всех* $x \in \mathfrak{u}_i$.

Доказательство. Если $|\Psi_i| = 1$ или $\Psi_j \subset \mathrm{M}$, то справедливость утверждения леммы вытекает из определения линейной функции ξ_i. Далее считаем, что $|\Psi_i| \geqslant 2$ и $\Psi_j \not\subset \mathrm{M}$. Из доказательства предложения 10(в) вытекает, что существуют и однозначно определены индекс $k \in \{1, \ldots, K\}$ и корни $\delta_i, \delta_j \in \Delta_+$, такие что $\Psi_k \subset \mathrm{M}$, $\Psi_i + \delta_i \subset \Psi_k$, $\Psi_j + \delta_j \subset \Psi_k$ и $\delta + \delta_j = \delta_i$. Пусть $x \in \mathfrak{u}_i$. Тогда по определению имеем $\xi_i(x) = \xi_k([x, e_{\delta_i}])$, $\xi_j([x, e_\delta]) = \xi_k([[x, e_\delta], e_{\delta_j}])$. Применяя тождество Якоби, получаем $\xi_j([x, e_\delta]) = \xi_k([x, [e_\delta, e_{\delta_j}]]) + \xi_k([[x, e_{\delta_j}], e_\delta])$. Так как $[e_\delta, e_{\delta_j}] = ce_{\delta_i}$ для некоторого $c \in \mathbb{C}^\times$, то имеем $\xi_j([x, e_\delta]) = c\xi_k([x, e_{\delta_i}]) + \xi_k([[x, e_{\delta_j}], e_\delta])$. Для завершения доказательства достаточно проверить, что $[x, e_{\delta_j}] = 0$. Последнее равенство будет выполнено, если мы докажем, что $\alpha + \delta_j \notin \Delta_+$ при всяком $\alpha \in \Psi_i$. Предположим, что $\alpha + \delta_j \in \Delta_+$ для некоторого $\alpha \in \Psi_i$. Тогда для корня $\alpha + \delta_j + \delta \in \Psi_k$ имеем представление $\alpha + \delta_j + \delta = (\alpha + \delta_j) + \delta$ в виде суммы двух положительных корней. Так как $\delta \notin \Psi$, то $\alpha + \delta_j \in \Psi$. Кроме того, имеем $\alpha + \delta \in \Psi$. Значит, $\mathrm{Supp}\,(\alpha + \delta_j + \delta) = \mathrm{Supp}\,(\alpha + \delta) \cup \mathrm{Supp}\,(\alpha + \delta_j)$, и мы имеем противоречие с условиями $\pi(\alpha + \delta_j + \delta) \notin \mathrm{Supp}\,(\alpha + \delta)$ и $\pi(\alpha + \delta_j + \delta) \notin \mathrm{Supp}\,(\alpha + \delta_j)$, которые выполнены в силу предложения 8(а). $\square$

Для каждого $i \in \{1, \ldots, K\}$ положим $\mathfrak{n}_i = \{x \in \mathfrak{u}_i \mid \xi_i(x) = 0\}$. Очевидно, что $\mathfrak{n}_i = 0$ при $|\Psi_i| = 1$. Теперь рассмотрим подпространство $\mathfrak{n} = \mathfrak{u}_0 \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{K} \mathfrak{n}_i \subset \mathfrak{u}$.

Предложение 11. *Подпространство* $\mathfrak{n}$ *является подалгеброй в* $\mathfrak{u}$.

Доказательство. Напомним (см. лемму 19), что для всякого корня $\alpha \in \Psi$ и всякого его представления $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta, \gamma \in \Delta_+$, ровно один из корней β, γ лежит в Ψ. В силу этого условия доказательство сводится к проверке условия $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{g}_\delta] \subset \mathfrak{n}$ для любых $i \in \{1, \ldots, K\}$ и $\delta \notin \Psi$. Проверим это условие. Если для любого $\alpha \in \Psi_i$ имеем $\alpha + \delta \notin \Psi$, то включение $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{g}_\delta] \subset \mathfrak{n}$ имеет место автоматически. Если для какого-то $\alpha \in \Psi_i$ оказалось $\alpha + \delta \in \Psi_j$ при некотором $j \in \{1, \ldots, K\}$ (при этом $i \ne j$ в силу предложения 10(б)), то по предложению 10(а) получаем $\Psi_i + \delta \subset \Psi_j$. Тогда из определения подпространств $\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j$ и леммы 22 имеем $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{g}_\delta] \subset \mathfrak{n}_j \subset \mathfrak{n}$. $\square$

Лемма 23. *Тор* S *нормализует подалгебру* $\mathfrak{n}$.

Доказательство. В силу условия (Т) для любых двух корней $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$, таких что $\alpha \sim \beta$, имеем $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$. Далее, пусть теперь $\alpha', \beta' \in \Psi \backslash \mathrm{M}$ и $\alpha' \sim \beta'$. Тогда из определения отношения эквивалентности следует, что существуют корни $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ и $\delta \in \Delta_+$, такие что $\alpha = \alpha' + \delta$ и $\beta = \beta' + \delta$. Тогда $\tau(\alpha') = \tau(\alpha) - \tau(\delta) = \tau(\beta) - \tau(\delta) = \tau(\beta')$. Мы получили, что для любого $i \in \{1, \ldots, K\}$ подпространство $\mathfrak{u}_i$, а значит, и подпространство $\mathfrak{n}_i$ является весовым относительно S и поэтому S-инвариантно. Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

4.4. Этот пункт является завершающим этапом доказательства теоремы 5. Мы построим подгруппу $H \subset G$ и докажем, что она является сферической в G.

Обозначим через N унипотентную подгруппу в G с касательной алгеброй $\mathfrak{n}$. Положим $H = SN$. Из леммы 23 следует, что H является подгруппой в G, причём $H = S \leftthreetimes N$ и H стандартно вложена в B. При $i = 1, \ldots, K$ положим $\omega_i = \tau(\alpha) \in \mathfrak{X}(S)$, где $\alpha \in \Psi_i$ — произвольный корень. Из доказательства леммы 23 следует, что вес ω_i определён корректно.

Предложение 12. *Подгруппа* H *является разрешимой сферической подгруппой в* G, *стандартно вложенной в* B, *причём её набор комбинаторных данных совпадает с*

$(S, \mathrm{M}, \pi, \sim)$.

Прежде чем доказывать это предложение, докажем сначала несколько вспомогательных лемм.

Напомним (см. предложение 8(б)), что для всякого корня $\alpha \in \Psi$ отображение $\pi\colon F(\alpha) \to \to \operatorname{Supp} \alpha$ является биекцией.

Лемма 24. *Пусть различные корни $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$ таковы, что $\alpha \sim \beta$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta)$. Тогда:*

(а) *существует единственная вершина $\eta(\alpha, \beta) \in \operatorname{Supp} \alpha \backslash \operatorname{Supp} \beta$ схемы Дынкина системы простых корней Π, соединённая ребром с вершиной из $\operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \beta$;*

(б) *если корень $\alpha' \in F(\alpha)$ таков, что $\pi(\alpha') = \eta(\alpha, \beta)$, то существует корень $\beta' \in F(\beta)$ с условием $\alpha' \sim \beta'$.*

Доказательство дословно повторяет доказательство леммы 13. $\square$

Лемма 25. *Пусть попарно различные корни $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{M}$ таковы, что $\alpha \sim \beta = \tau(\gamma)$ и $\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \pi(\gamma)$. Тогда либо $\operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \beta \subset \operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \gamma$, либо $\operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \gamma \subset \subset \operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \beta$.*

Доказательство почти дословно такое же, как и доказательство леммы 14, с той разницей, что ссылку на предложение 5 следует заменить ссылкой на условие (E). $\square$

Лемма 26. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathrm{M}$, $\alpha \neq \beta$ и $I = \operatorname{Supp} \alpha \cap \operatorname{Supp} \beta \neq \varnothing$. Пусть $\delta \in I$ — произвольный корень и корни $\alpha' \in F(\alpha)$ и $\beta' \in F(\beta)$ таковы, что $\pi(\alpha) = \pi(\beta) = \delta$. Тогда:*

(а) *если для корней α, β реализуется одна из возможностей* (D1) *или* (D2), *то $\alpha' = \beta'$;*

(б) *если для корней α, β реализуется одна из возможностей* (E1) *или* (E2), *то $\alpha' \sim \beta'$.*

В любом случае $\alpha' \sim \beta'$.

Доказательство. В силу условий (D) и (E) для корней α и β реализуется одна из возможностей (D1), (D2), (E1), (E2). Утверждение (а) получается непосредственной проверкой. Если реализуется одна из возможностей (E1) или (E2), то имеем $\alpha \sim \beta$. В случае (E1) множество I состоит из одного корня δ. Тогда $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ и $\alpha' \sim \beta'$. Наконец, если реализуется возможность (E2), то имеем либо $\alpha' = \beta'$, либо $\alpha - \alpha' = \beta - \beta'$. В обоих случаях $\alpha' \sim \beta'$. $\square$

Если $\Psi' \subset \Psi$ — произвольное непустое подмножество, то корректно определено ограничение отношения эквивалентности $\sim$ с множества Ψ на подмножество Ψ', поэтому можно рассматривать классы эквивалентности на Ψ'.

Лемма 27. *Пусть $\mathrm{M}' \subset \mathrm{M}$ — произвольное подмножество. Положим $l = |\bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}'} \operatorname{Supp} \delta|$, k — количество классов эквивалентности во множестве $\bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}'} F(\delta)$, m — количество классов эквивалентности во множестве M'. Тогда:*

(а) $\dim \langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}', \mu \sim \nu \rangle = |\mathrm{M}'| - m$;

(б) $l \geqslant k + |\mathrm{M}'| - m$.

Доказательство. Докажем оба утверждения (а), (б) одновременно индукцией по $|\mathrm{M}'|$.

При $|\mathrm{M}'| = 1$ имеем $|\mathrm{M}'| = m$ и $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}', \mu \sim \nu \rangle = \{0\}$, поэтому утверждение (а) верно. Утверждение (б) также верно по свойству (3) корней из M.

Предположим, что утверждения (а) и (б) доказаны для всех собственных подмножеств множества M', и докажем эти утверждения для множества M'. Пусть $\mathrm{M}' = \widetilde{\mathrm{M}}' \cup \{\alpha\}$, где $\alpha \notin \widetilde{\mathrm{M}}'$. Введём обозначение $J = (\operatorname{Supp} \alpha) \backslash (\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} \operatorname{Supp} \delta)$. Положим $\widetilde{l} = |\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} \operatorname{Supp} \delta|$, $\widetilde{k}$ — количество классов эквивалентности во множестве $\bigcup\limits_{\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'} F(\delta)$, $\widetilde{m}$ — количество классов эквивалентности во множестве $\widetilde{\mathrm{M}}'$. Ясно, что $|\mathrm{M}'| = |\widetilde{\mathrm{M}}'| + 1$ и $l = \widetilde{l} + |J|$.

Далее рассмотрим два случая.

Случай 1. Для всякого корня $\delta \in \widetilde{\mathrm{M}}'$ имеем $\alpha \nsim \delta$. Тогда $m = \widetilde{m} + 1$ и подпространство $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \mu \sim \nu \rangle$ совпадает с подпространством $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \mu \sim \nu \rangle$, которое по предположению индукции имеет размерность $|\widetilde{\mathrm{M}}'| - \widetilde{m} = |\mathrm{M}| - m$. Тем самым доказано утверждение (а). Чтобы доказать утверждение (б), в силу предположения индукции достаточно проверить, что $|J| \geqslant k - \widetilde{k}$. Это неравенство выполнено по лемме 26.

Случай 2. Существует корень $\alpha_0 \in \widetilde{\mathrm{M}}'$, такой что $\alpha \sim \alpha_0$. Тогда имеем $m = \widetilde{m}$. В силу условия (C) существует простой корень $\rho \in \mathrm{Supp}\ \alpha$ с условием $\rho \in J$, поэтому разность $\alpha - \alpha_0$ не лежит в подпространстве $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \mu \sim \nu \rangle$. Легко видеть, что подпространство $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \mathrm{M}, \mu \sim \nu \rangle$ совпадает с подпространством $\langle \mu - \nu \mid \mu, \nu \in \widetilde{\mathrm{M}}', \mu \sim \nu \rangle \oplus \langle \alpha - \alpha_0 \rangle$, его размерность с учётом предположения индукции равна $|\widetilde{\mathrm{M}}'| - \widetilde{m} + 1 = |\mathrm{M}'| - m$. Утверждение (а) доказано. Чтобы доказать утверждение (б), в силу предположения индукции достаточно проверить, что $|J| \geqslant k - \widetilde{k} + 1$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 2.1. $\pi(\alpha) \in J$. Нужное неравенство выполнено в силу леммы 26 и условия $\alpha \sim \alpha_0$.

Подслучай 2.2. $\pi(\alpha) \notin J$. В этой ситуации существует корень $\beta \in \widetilde{\mathrm{M}}'$, такой что $\pi(\alpha) \in \mathrm{Supp}\ \beta$. Без ограничения общности будем считать, что множество $\mathrm{Supp}\ \alpha \cap \mathrm{Supp}\ \beta$ максимально по включению. Пусть $\eta(\alpha, \beta)$ — корень из леммы 24(а). Рассмотрим корни $\alpha' \in F(\alpha)$ с условием $\pi(\alpha') = \eta(\alpha, \beta)$ и $\beta' \in F(\beta)$ с условием $\beta' \sim \alpha'$ (корень β' существует по лемме 24(б)). Докажем, что $\eta(\alpha, \beta) \in J$. Предположим противное. Тогда существуют такие корни $\gamma \in \widetilde{\mathrm{M}}' \backslash \{\beta\}$ и $\gamma' \in F(\gamma)$, что $\pi(\gamma') = \pi(\alpha')$. Если $\alpha' = \gamma'$, то имеем $\mathrm{Supp}\ \alpha' \subset \mathrm{Supp}\ \gamma$, $\mathrm{Supp}\ (\alpha - \alpha') = \mathrm{Supp}\ (\beta - \beta') \subset \mathrm{Supp}\ \beta$, откуда $\mathrm{Supp}\ \alpha \subset \mathrm{Supp}\ \beta \cup \mathrm{Supp}\ \gamma$ — противоречие с условием (C). Значит, $\alpha' \neq \gamma'$ и по лемме 26(а,б) для корней реализуется одна из возможностей (E1) или (E2). В частности, $\alpha \sim \gamma$ и $\pi(\alpha) = \pi(\gamma)$, откуда в силу леммы 25 получаем $\mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \gamma \supsetneqq \mathrm{Supp}\ \alpha \cup \mathrm{Supp}\ \beta$ — противоречие с выбором β. Таким образом, имеем $\eta(\alpha, \beta) \in J$. Тогда неравенство $|J| \geqslant k - \widetilde{k} + 1$ выполняется в силу леммы 26 и условия $\alpha' \sim \beta'$.

Утверждение (б) доказано. $\square$

Доказательство предложения 12. В доказательстве нуждается только сферичность подгруппы H, все остальные условия выполнены по построению. Рассмотрим подпространство $R = \langle \bigcup\limits_{\delta \in \mathrm{M}} \mathrm{Supp}\ \delta \rangle \subset Q$ и обозначим через l его размерность. Пусть m — количество классов эквивалентности во множестве M. В силу свойства (4) образ подпространства R при отображении τ порождается весами $\omega_1, \ldots, \omega_K$. По лемме 27(а) размерность этого образа равна $l - (|\mathrm{M}| - m)$. Значит, $K \geqslant l - (|\mathrm{M}| - m)$. С другой стороны, $K \leqslant l - (|\mathrm{M}| - m)$ по лемме 27(б). Следовательно, $K = l - (m - n)$ и все веса $\omega_1, \ldots, \omega_K$ линейно независимы. Кроме того, по построению коразмерность подпространства $\mathfrak{n}_i$ в пространстве $\mathfrak{u}_i$ равна 1 для любого $i \in \{1, \ldots, K\}$. Таким образом, выполнено условие (2) теоремы 1 и подгруппа H является сферической в G. $\square$

Доказательство теоремы 5 завершено.

Замечание 4. Как видно из доказательства теоремы 5, унипотентный радикал N разрешимой сферической подгруппы H, стандартно вложенной в B, однозначно с точностью до сопряжения элементом тора T восстанавливается по набору $(\mathrm{M}, \pi, \sim)$, удовлетворяющему условиям (A), (D), (E), (C).

§ 5. Классификация разрешимых сферических подгрупп с точностью до сопряжённости

Теоремы 4 и 5 дают классификацию разрешимых сферических подгрупп, стандартно вложенных в B, с точностью до сопряжения элементом тора T. Целью настоящего параграфа является выяснение вопроса о том, когда две разрешимые сферические подгруппы, стандартно вложенные в B, сопряжены в группе G и как при этом связаны отвечающие им наборы комбинаторных данных.

5.1. Основным результатом этого пункта является предложение 13.

Пусть $H_1, H_2 \subset G$ — две разрешимые подгруппы, стандартно вложенные в B. Пусть N_i — унипотентный радикал группы H_i, а $S_i \subset T$ — её максимальный тор, так что $H_i = S_i \leftthreetimes N_i$, $i = 1, 2$. Положим $Z = Z_G(S_1)$. Группа Z связна (как централизатор тора в G), а её касательная алгебра $\mathfrak{z}$ имеет вид $\mathfrak{z} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta : \tau(\alpha) = 0} \mathfrak{g}_\alpha$.

Лемма 28. *Если подгруппы H_1, H_2 сопряжены в G, то $H_2 = g_0 H_1 g_0^{-1}$ для некоторого элемента $g_0 \in N_G(T) \cdot Z$.*

Доказательство. Пусть элемент $g \in G$ таков, что $H_2 = gH_1g^{-1}$. Тогда $N_2 = gN_1g^{-1}$. Домножая элемент g слева на подходящий элемент из N_2, можно считать, что $S_2 = gS_1g^{-1}$. В силу разложения Брюа для группы G имеем $g = u_1 \sigma u_2$, где $u_1, u_2 \in U$, $\sigma \in N_G(T)$. Рассмотрим произвольный элемент $s_1 \in S_1$ и положим $s_2 = gs_1g^{-1} \in S_2$. Тогда имеем $u_1^{-1} s_2 u_1 \sigma = \sigma u_2 s_1 u_2^{-1}$, что можно переписать в виде $s_2 v_1 \sigma = \sigma s_1 v_2$, где $v_1 = s_2^{-1} u_1^{-1} s_2 u_1 \in U$ и $v_2 = s_1^{-1} u_2 s_1 u_2^{-1} \in U$. Отсюда $\sigma v_2 \sigma^{-1} = (\sigma s_1^{-1} \sigma^{-1}) s_2 v_1 \in B$. Так как v_2 — унипотентный элемент, то $\sigma v_2 \sigma^{-1} \in U$. Значит, $\sigma v_2 \sigma^{-1} v_1^{-1} = (\sigma s_1^{-1} \sigma^{-1}) s_2 \in U \cap T = \{e\}$, откуда $s_2 = \sigma s_1 \sigma^{-1}$ и $v_2 = \sigma v_1 \sigma^{-1}$. Таким образом, $s_1 = \sigma^{-1} g s_1 g^{-1} \sigma$ для любого элемента $s_1 \in S_1$, поэтому $\sigma^{-1} g \in Z_G(S_1)$ и $g \in N_G(T) \cdot Z$. □

Предложение 13. *Если обе подгруппы H_1, H_2 являются сферическими и $H_2 = gH_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$, то $H_2 = \sigma H_1 \sigma^{-1}$ для некоторого $\sigma \in N_G(T)$.*

Доказательство. В силу леммы 28 можно считать, что $g \in N_G(T) \cdot Z$. Рассмотрим в алгебре Ли $\mathfrak{z}$ подалгебру $\mathfrak{u}_0 = \bigoplus\limits_{\alpha \in \Delta_+ : \tau(\alpha) = 0} \mathfrak{g}_\alpha$. Она является касательной алгеброй максимальной унипотентной подгруппы U_0 группы Z. Кроме того, $\mathfrak{u}_0 \subset \mathfrak{h}_1$. Пусть $g = \sigma_0 z$, где $\sigma_0 \in N_G(T)$, $z \in Z$. Так как $\operatorname{Ad}(g)\mathfrak{u}_0 \subset \mathfrak{u}$, то $\operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0 \subset \operatorname{Ad}(\sigma_0^{-1})\mathfrak{u}$. Отсюда следует, что проекция алгебры $\operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0$ на подпространство $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{z}$ равна нулю и что для любого корня $\alpha \in \Delta$ проекция алгебры $\operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0$ на одно из пространств $\mathfrak{g}_\alpha$ или $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ равна нулю. Из соображений размерности получаем, что $\operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0$ — регулярная подалгебра в $\mathfrak{z}$, а подалгебра $\mathfrak{t} \oplus \operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0$ является борелевской подалгеброй в $\mathfrak{z}$, содержащей картановскую подалгебру $\mathfrak{t}$. Значит, существует элемент $\sigma_1 \in N_Z(T) \subset N_G(T)$, такой что $\operatorname{Ad}(\sigma_1)(\mathfrak{t} \oplus \operatorname{Ad}(z)\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}_0$ и $\operatorname{Ad}(\sigma_1 z)\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0$. Таким образом, $z \in N_G(T) \cdot N_Z(U_0)$. Так как $N_Z(U_0) = T \leftthreetimes U_0$ и $U_0 \subset H_1$, то мы можем считать, что $z \in N_G(T)$. Отсюда окончательно получаем $g \in N_G(T)$. □

5.2. В этом пункте мы введём понятие элементарного преобразования и докажем основную теорему параграфа (теорема 6).

Пусть $H \subset G$ — разрешимая сферическая подгруппа, стандартно вложенная в B.

Определение 7. Активный корень α назовём *регулярным*, если множество Ψ_i, содержащее корень α, состоит из одного элемента, т. е. $|\Psi_i| = 1$.

Легко видеть, что активный корень α является регулярным тогда и только тогда, когда проекция подпространства $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{u}$ на корневое подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ равна нулю. Ясно также, что подгруппа H является регулярной (т. е. нормализуется тором T) тогда и только тогда, когда все её активные корни регулярны.

Обозначим через $\Psi^{reg}(H)$ множество регулярных активных корней группы H. Положим также $\Omega(H) = \Delta_+ \backslash \Psi^{reg}(H)$. Ясно, что $\alpha \in \Omega(H)$ тогда и только тогда, когда проекция алгебры $\mathfrak{n}$ на корневое подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ не равна нулю.

Определение 8. Пусть $\alpha \in \Psi^{reg}(H) \cap \Pi$. Назовём *элементарным преобразованием с центром в* α (или просто *элементарным преобразованием*) переход от подгруппы H к подгруппе $n_\alpha H n_\alpha^{-1}$, где $n_\alpha \in N_G(T)$ — элемент, образом которого в группе Вейля W является отражение r_α.

Так как при простом отражении r_α из всех положительных корней только корень α переходит в отрицательный, то подгруппа $n_\alpha H n_\alpha^{-1}$ также стандартно вложена в B.

Обозначим через C_0 камеру Вейля, отвечающую борелевской подгруппе B. Для всякой камеры Вейля C обозначим через $P(C)$ множество тех корней из Δ, которые являются положительными относительно C. Ясно, что $P(C_0) = \Delta_+$.

Теперь изучим следующий вопрос. Пусть дана разрешимая сферическая подгруппа $H \subset G$, стандартно вложенная в B. Определим все подгруппы, сопряжённые подгруппе H и также стандартно вложенные в B. Пусть H' — такая подгруппа. Тогда по предложению 13 имеем $H' = \sigma H \sigma^{-1}$ для некоторого $\sigma \in N_G(T)$. Пусть w — образ элемента σ в группе Вейля. Тогда $w\Omega(H) \subset \Delta_+ = P(C_0)$, откуда $\Omega(H) \subset P(w^{-1}C_0)$. Обратно, пусть камера Вейля C такова, что $\Omega(H) \subset P(C)$. Обозначим через w_C (единственный) элемент группы Вейля, такой что $C = w_C^{-1}C_0$. Тогда, очевидно, подгруппа $H' = w_C H w_C^{-1}$ стандартно вложена в B.

Лемма 29. *Камера Вейля C удовлетворяет условию $\Omega(H) \subset P(C)$ тогда и только тогда, когда она содержится в конусе $X(H) = \{x \mid (x,\alpha) \geqslant 0$ для любого $\alpha \in \Omega(H)\}$.*

Доказательство вытекает из того, что для корня α условие $\alpha \in P(C)$ равносильно условию $(\alpha, x) \geqslant 0$ для любого $x \in C$. □

Пусть H, H', σ, w таковы, как выше. Тогда имеем $\Omega(H) \subset P(w^{-1}C_0)$ и, по лемме 29, $w^{-1}C_0 \subset X(H)$. Конус $X(H)$ является выпуклым (как пересечение нескольких полупространств) и состоит из объединения некоторого количества камер Вейля. Поэтому найдутся такие камеры Вейля $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, содержащиеся в $X(H)$, что в последовательности $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n = w^{-1}C_0$ любые две соседние камеры Вейля имеют общую гипергрань. При $i = 1, \ldots, n$ обозначим через w_i отражение относительно общей гиперграни камер C_{i-1} и C_i, $w_i \in W$, $w_i^2 = e$. Тогда при $i = 1, \ldots, n$ имеем $C_i = w_i w_{i-1} \ldots w_1 C_0$. Далее, для всякого $i = 1, \ldots, n$ существует простое отражение r_i, удовлетворяющее условию $w_i = (w_{i-1}w_{i-2}\ldots w_1) r_i (w_{i-1}w_{i-2}\ldots w_1)^{-1}$. Простой корень, соответствующий отражению r_i, обозначим через α_i. Отсюда получаем, что $C_i = r_1 \ldots r_{i-1} r_i C_0 = (r_i r_{i-1} \ldots r_1)^{-1} C_0$, $i = 1, \ldots, n$. Напомним, что $C_i \subset X(H)$ при всяком $i = 1, \ldots, n$, поэтому с учётом леммы 29 подгруппа $H_i = (\rho_i \rho_{i-1} \ldots \rho_1) H (\rho_i \rho_{i-1} \ldots \rho_1)^{-1}$ стандартно вложена в B, где ρ_i — (любой) фиксированный представитель отражения r_i в группе $N_G(T)$. Отсюда при $i = 1, \ldots, n$ получаем, что $H_i = \rho_i H_{i-1} \rho_i^{-1}$ (полагаем $H_0 = H$), корень α_i является активным для группы H_{i-1} и переход $H_{i-1} \mapsto H_i$ является элементарным преобразованием с центром в α_i. Так как $H_n = H'$, то нами доказана следующая

Теорема 6. *Две разрешимые сферические подгруппы $H, H' \subset G$, стандартно вложенные в B, сопряжены в G тогда и только тогда, когда подгруппа H' может быть получена из H применением подходящей цепочки элементарных преобразований.*

5.3. Теперь выясним, как меняется система данных разрешимой сферической подгруппы при элементарном преобразовании. Рассмотрим две разрешимые сферические подгруппы H и H', получающиеся друг из друга посредством элементарного преобразования с центром в α, где α — регулярный простой активный корень подгруппы H (а также подгруппы H'). Пусть $(S, M, \pi, \sim)$ и $(S', M', \pi, \sim')$ — системы данных подгрупп H и H' соответственно. Обозначим через σ_α какой-нибудь элемент группы $N_G(T)$, образом которого в группе Вейля W является простое отражение r_α относительно корня α. Имеем $H' = \sigma_\alpha H \sigma_\alpha^{-1}$, откуда с очевидностью получаем $S' = \sigma_\alpha S \sigma_\alpha^{-1}$.

Лемма 30. *Имеем:*

(а) $\Psi(H') = r_\alpha(\Psi(H) \backslash \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}$*;*

(б) $\pi'(r_\alpha(\beta)) = \pi(\beta)$ *при* $\beta \in \Psi(H) \backslash \{\alpha\}$*;*

(в) $\mathrm{M}' \backslash \{\alpha\} = r_\alpha(\mathrm{M} \backslash \{\alpha\})$*;*

Доказательство. Утверждение (а) очевидно. Докажем (б). Пусть $\beta \in \Psi(H) \backslash \{\alpha\}$. Прежде всего заметим, что $\pi(\beta) \ne \alpha$, откуда $\pi(\beta) \in \operatorname{Supp} r_\alpha(\beta)$. Пусть $r_\alpha(\beta) = \beta_1 + \beta_2$ — произвольное разложение корня $r_\alpha(\beta) \in \Psi(H')$ в сумму двух положительных корней, причём $\beta_1 \in \Psi(H')$. Достаточно показать, что $\pi(\beta) \notin \operatorname{Supp} \beta_1$. Если $\beta_1 = \alpha$, то это выполнено, поэтому далее считаем $\beta_1 \ne \alpha$. Кроме того, имеем $\beta_2 \ne \alpha$, так как $\beta_2 \notin \Psi(H')$. Значит, в правой части выражения $\beta = r_\alpha(\beta_1) + r_\alpha(\beta_2)$ оба корня положительны, причём $r_\alpha(\beta_1) \in \Psi(H)$. Отсюда $\pi(\beta) \notin \operatorname{Supp} r_\alpha(\beta_1)$. Более того, $\pi(\beta) \notin \operatorname{Supp} r_\alpha(\beta_1) \cup \{\alpha\}$. Но $\operatorname{Supp} \beta_1 \subset \operatorname{Supp} r_\alpha(\beta_1) \cup \{\alpha\}$, откуда $\pi(\beta) \notin \operatorname{Supp} \beta_1$, что и требовалось.

Теперь докажем (в). Пусть $\beta \in \mathrm{M} \backslash \{\alpha\}$. Предположим, что корень $r_\alpha(\beta) \in \Psi(H') \backslash \{\alpha\}$ не является максимальным активным корнем для подгруппы H'. В этом случае существуют корни $\delta \in \Psi(H') \backslash \{\alpha\}$ и $\gamma \in \Delta_+ \backslash \Psi(H')$, такие что $r_\alpha(\beta) + \gamma = \delta$. В частности, $\gamma \ne \alpha$, откуда $r_\alpha(\gamma) \in \Delta_+$. Для активного корня $r_\alpha(\delta)$ получаем представление $r_\alpha(\delta) = \beta + r_\alpha(\gamma)$ в виде суммы двух положительных корней, что приводит к противоречию с максимальностью активного корня β. Таким образом, $r_\alpha(\mathrm{M} \backslash \{\alpha\}) \subset \mathrm{M}' \backslash \{\alpha\}$. Аналогично получаем $r_\alpha(\mathrm{M}' \backslash \{\alpha\}) \subset \mathrm{M} \backslash \{\alpha\}$, откуда и следует требуемое. $\square$

Как следствие из леммы 30 вытекает следующее

Предложение 14. *Системы данных* $(\mathrm{M}, \pi, \sim)$ *и* $(\mathrm{M}', \pi', \sim')$ *связаны следующим образом:*

(1) *если* $\alpha \in \operatorname{Supp} \delta$ *для некоторого корня* $\delta \in r_\alpha(\mathrm{M} \backslash \{\alpha\})$*, то:*

(а) $\mathrm{M}' = r_\alpha(\mathrm{M} \backslash \{\alpha\})$*;*

(б) $\pi'(\beta) = \pi(r_\alpha(\beta))$ *для всякого* $\beta \in \mathrm{M}'$*;*

(в) *для всех* $\beta, \gamma \in \mathrm{M}'$ *соотношение* $\beta \sim' \gamma$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $r_\alpha(\beta) \sim r_\alpha(\gamma)$*;*

(2) *если* $\alpha \notin \operatorname{Supp} \delta$ *для всех* $\delta \in r_\alpha(\mathrm{M}' \backslash \{\alpha\})$*, то:*

(а) $\mathrm{M}' = r_\alpha(\mathrm{M} \backslash \{\alpha\}) \cup \{\alpha\}$*;*

(б) $\pi'(\beta) = \pi(r_\alpha(\beta))$ *для всякого* $\beta \in \mathrm{M}' \backslash \{\alpha\}$*,* $\pi'(\alpha) = \alpha$*;*

(в) *для всех* $\beta, \gamma \in \mathrm{M}' \backslash \{\alpha\}$ *соотношение* $\beta \sim' \gamma$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $r_\alpha(\beta) \sim r_\alpha(\gamma)$*; для всякого* $\beta \in \mathrm{M}' \backslash \{\alpha\}$ *выполнено соотношение* $\beta \not\sim' \alpha$*.*

В завершение этого параграфа отметим, что теоремы 4, 5 и 6 дают полную классификацию разрешимых сферических подгрупп с точностью до сопряжённости.

Литература

[1] M. Krämer. Sphärische Untergruppen in kompakten zusammenhängenden Liegruppen // Compositio Math., 1979, V. 38, S. 129–153.

[2] И.В. Микитюк. Об интегрируемости инвариантных гамильтоновых систем с однородными конфигурационными пространствами // Матем. сб., 1986, т. 129, с. 514–534.

[3] M. Brion. Classification des espaces homogènes sphériques // Compositio Math., 1987, V. 63, p. 189–208.

[4] О.С. Якимова. Слабо симметрические пространства полупростых групп Ли // Вестник Моск. Ун-та, сер. 1, матем., мех., 2002, №2, с. 57–60.

[5] D. Luna. Sous-groupes sphériques résolubles // Prépublication de l'Institut Fourier no. 241, 1993.

[6] D. Luna. Variétés sphériques de type A // IHÉS Publ. Math., 2001, V. 94, p. 161-226.

[7] P. Bravi, G. Pezzini. Wonderful varieties of type B and C // arXiv:0909.3771v1.

[8] S. Cupit-Foutou. Wonderful varieties: a geometric realization // arXiv:0907.2852v2.

[9] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1995. — 344 с.