

Построение инвариантных норм Ляпунова планарных систем с переключениями

А.М.Мусаева *

16 сентября 2022 г.

Аннотация

Рассматривается задача об устойчивости линейных динамических систем с переключениями. Известно, что неприводимая d -мерная система всегда имеет инвариантную норму Ляпунова (норма Барабанова), определяющую устойчивость системы и порядок роста ее траекторий. Мы доказываем, что в случае $d = 2$ инвариантная норма может быть построена в явном виде для любой системы с конечным числом матриц. Представлен метод построения, алгоритм вычисления показателя Ляпунова и способ определения устойчивости системы. Доказана теорема о классификации инвариантных норм, в частности, исследованы случаи неединственности, а также норм специального вида (норм, порожденных многоугольниками и т.д.).

Ключевые слова: *Линейная система с переключениями, динамическая система, устойчивость, функция Ляпунова, норма, траектория, двойственность, показатель Ляпунова*

УДК 517.929.21, 517.926, 517.74

1. Введение

Линейной системой с переключениями называется линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t), & t \geq 0 \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (1)$$

где матрица $A(\cdot)$ является управляемым параметром, принимающим произвольные значения из заданного компактного множества матриц \mathcal{A} , называемого *множеством управления*.

Функция управления, или *правило переключений* (switching law) – это произвольная измеримая функция $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{A}$. Линейные системы с переключениями имеют множество теоретических приложений в теории устойчивости, оптимальном управлении и т.д. а также применяются в прикладных задачах робототехники, электроники, химии, инженерии и т.д. см., например, [1]. Одним из центральных вопросов является исследование максимального роста траекторий системы и её устойчивости. *Показателем Ляпунова* $\sigma(\mathcal{A})$ системы называется инфимум чисел α , для которых $\|\mathbf{x}(t)\| \leq C e^{\alpha t} \|\mathbf{x}_0\|$, $t \in [0, +\infty)$.

*Московский Государственный Университет (Россия), e-mail: asya.musaeva2001@mail.ru

Таким образом, самый быстрый рост траектории имеет порядок $C e^{\sigma t}, t \rightarrow \infty$. Система называется *асимптотически устойчивой*, если все её траектории стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Известно [2], что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $\sigma < 0$.

В литературе представлено множество методов исследования устойчивости. Среди них метод общей квадратичной функции Ляпунова (CQLF) [1, 6], который дает достаточные условия устойчивости, методы кусочно-линейной и кусочно-квадратичной функция Ляпунова [7, 8], метод экстремального политопа [4]. Одним из наиболее эффективных методов является метод *инвариантных норм Ляпунова*. Инвариантная норма обладает следующим характеристическим свойством: $\|\mathbf{x}(t)\| \leq e^{\sigma t} \|\mathbf{x}_0\|$ для любой траектории $\mathbf{x}(t)$, и при этом для любой точки \mathbf{x}_0 существует траектория $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ такая, что $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0$ и $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = e^{\sigma t} \|\mathbf{x}_0\|$. Н.Барабанов [3] доказал, что для любой неприводимой системы с выпуклым компактным множеством управления \mathcal{A} инвариантная норма Ляпунова существует. Однако, ее построение – чрезвычайно сложная задача (см. подробнее [4]). Решение задачи устойчивости для произвольного семейства матриц автоматически решает задачу вычисления показателя Ляпунова. Действительно, мы можем сравнить показатель Ляпунова с любым заданным числом, и следовательно, вычислить этот показатель методом деления пополам.

Давно было замечено, что в случае $d = 2$ для систем с двумя матрицами возможно найти показатель Ляпунова в явном виде (см. статьи [9, 10, 11] и обзор [12]). В работе [11] утверждалось (без ссылок), что общеизвестен случай, когда все матрицы диагональны, и в той же работе был представлен метод вычисления показателя Ляпунова с произвольной точностью для случая двух матриц 2×2 . Метод предполагал рассмотрение множества случаев. В работе [10] этот способ был упрощен, но он содержал некоторые ошибки, которые в дальнейшем исправлялись, в частности, в работе [9]. Основным инструментом при вычислении показателя Ляпунова был поиск “наихудшей” траектории. Функции Ляпунова в данных работах не исследовались. В работе [11] изучались двумерные системы со случайными переключениями. Для систем с дискретным временем показатель Ляпунова называется совместным спектральным радиусом. Заметим, что для дискретных 2×2 -систем, как ни странно, ситуация гораздо сложнее, и там нет способа явного построения инвариантной нормы и эффективного метода вычисления совместного спектрального радиуса [18, 21, 22, 23, 24]. Системы с дискретным временем 2×2 изучались в обширной литературе (см. [13, 13, 14, 16, 19] и библиографию этих работ). Как правило, любая дискретизация приводит к упрощению, но в данном случае наблюдается обратная ситуация: для дискретных систем не известно никакого явного построения нормы Ляпунова даже в двумерном случае. Более того, скорее всего такого алгоритма не существует. В литературе есть отрицательные результаты об алгоритмической сложности данной задачи ([18], [20]).

В данной работе представлен метод построения инвариантной функции Ляпунова в явном виде для произвольной двумерной системы с переключениями, заданной конечным числом матриц. Поскольку устойчивость, а так же норма Ляпунова не меняются от взятия выпуклой оболочки управления, все наши результаты переносятся на системы, заданные произвольным многогранником пространства матриц. Заметим, что случай произвольного конечного числа матриц не является прямым обобщением случая двух матриц и требует новых подходов и отдельной теоретической базы. Предлагаемый нами подход основан на использовании инвариантной нормы Ляпунова и ее свойствах (вместо поиска “наихудшей” траектории, как в работах).

Далее мы приводим алгоритм построения инвариантной нормы Ляпунова (нормы Барабанова) для произвольного конечного семейства 2×2 -матриц. Наличие инвариантной нормы для систем с переключениями позволяет делать точный анализ траекторий наибольшего роста.

Один из главных результатов работы - классификация инвариантных норм для всех

плоских систем с конечным множеством управления. В частности, найдены все случаи, в которых норма единственна. В остальных случаях найдены все возможные нормы. Заметим, что в отличие от систем с дискретным временем, где в “общем положении” инвариантная норма единственна ([5]), для систем с непрерывным временем это уже не так. Как мы увидим, для некоторых классов двумерных систем инвариантная норма единственна.

Работа построена следующим образом:

- в параграфе 2 и 3 даны основные определения и сформулированы вспомогательные факты
- в параграфе 4 сформулированы основные задачи
- параграф 5 посвящен исследованию систем из двух матриц
- отдельным случаем исследуются вырожденные системы, строятся и классифицируются инвариантные многоугольники (параграф 6)
- в параграфах 7-8 представлены основные результаты работы:
 - алгоритм построения инвариантной нормы
 - вычисление показателя Ляпунова
- в параграфе 9 представлена классификация всех инвариантных норм

Основной упор сделан на явное построение инвариантной нормы, поскольку именно инвариантная норма дает точные оценки на асимптотическое поведение на траектории наибольшего роста. Норма явно строится для произвольной системы с конечным числом матриц, и все нормы классифицируются.

2. Основные понятия и определения

Построение инвариантных норм будет осуществляться геометрически с помощью нахождения её единичного шара в \mathbb{R}^2 . Граница единичного шара является кусочно-аналитической кривой для ее построения нам понадобятся некоторые обозначения

1. Цветком $(\mathbf{a}, \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\})$ назовем конструкцию из направленного отрезка \mathbf{a} (стебля) и набора векторов $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ (лепестков), отложенных от конца вектора \mathbf{a} .

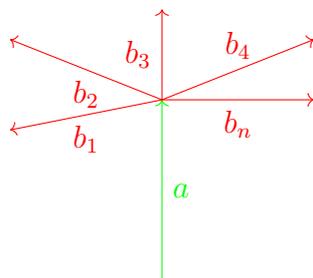


Рис. 1: Цветок $(\mathbf{a}, \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\})$

2. Лепестки \mathbf{z} и \mathbf{y} лежат по разные стороны от стебля \mathbf{x} , если отрезок, соединяющий концы векторов \mathbf{z} и \mathbf{y} , пересекает прямую $\langle \mathbf{x} \rangle$. В противном случае скажем, что \mathbf{z} и \mathbf{y} лежат по одну сторону от \mathbf{x} .

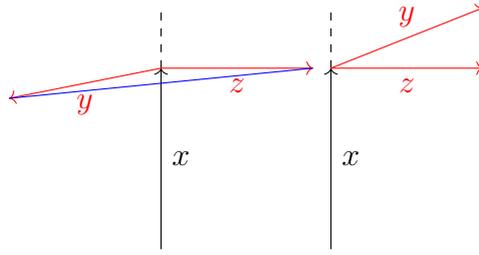


Рис. 2: *конфигурация слева* – лепестки z и y лежат по разные стороны от стебля x ; *конфигурация справа* – лепестки z и y лежат по одну сторону от стебля x

Будем обозначать стебель $x = \overrightarrow{OX}$.

3. Угол α между лепестками y и z , лежащими по разным сторонам от x – тот угол между векторами y и z , выходящих из точки X , который содержит точку O . Заметим, что α может быть больше π .

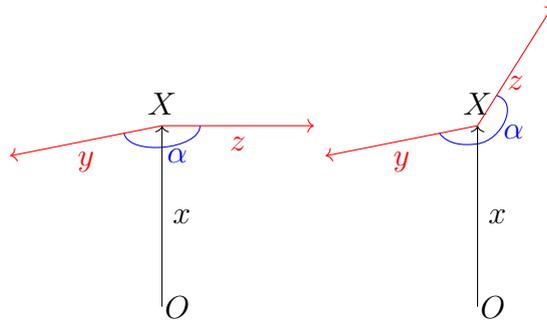


Рис. 3: *конфигурация слева* – угол α между лепестками y и z меньше π ; *конфигурация справа* – угол α между лепестками y и z больше π

4. Скажем, что лепесток b_1 выше лепестка b_2 в цветке $(a, \{b_1, b_2\})$ для векторов b_1 и b_2 , лежащих по одну стороны от вектора a , если угол между вектором b_1 и a меньше угла между векторами b_2 и a .

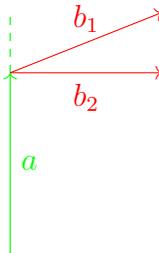


Рис. 4: Лепесток b_1 выше лепестка b_2 в цветке $(a, \{b_1, b_2\})$

5. Зонтиком назовем цветок $(a, \{b_1, b_2\})$ с двумя лепестками b_1 и b_2 , лежащими по разные стороны от a и образующими центральный угол меньше π .

6. Зонтичное переключение - зонтик, в котором касательные слева и справа к инвариантному телу, различны.

7. Закон переключения $A(t)$ - измеримая функция со множеством значений в $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Траектория, соответствующая закону переключению $A(t)$ является решением уравнения (1).

8. Модульный закон переключения $\overline{A(t)}$ направления $+(-)$ – такой закон переключения матриц, удовлетворяющий свойству, что в каждый момент времени \mathbf{x} мы выбираем более высокий лепесток среди всех лепестков, направленных по часовой (против часовой) стрелки относительно \mathbf{x} .

9. Матрица A мажорирует матрицу B , если для любого вектора \mathbf{x} векторы $A\mathbf{x}$ и $B\mathbf{x}$ лежат по одну сторону от вектора \mathbf{x} , и в цветке $(\mathbf{x}, \{A\mathbf{x}, B\mathbf{x}\})$ лепесток $A\mathbf{x}$ выше лепестка $B\mathbf{x}$.

10. Будем рассматривать такие \mathbf{x} , для которых существует $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполняется $A_1\mathbf{x} = \lambda A_2\mathbf{x}$, т.е. λ корень уравнения $\det(A_1 - \lambda A_2) = 0$. Корни λ_1 и λ_2 назовем направляющими значениями для пары матриц A_1, A_2 , а ядра – соответствующими направлениями.

3. Вспомогательные результаты

Следующие свойства показателей Ляпунова общеизвестны.

1. Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ верно *свойство сдвига*, а именно

$$\sigma(\mathcal{A} + \alpha I) = \sigma(\mathcal{A}) + \alpha,$$

где семейство $\mathcal{A} + \alpha I = \{A + \alpha I | A \in \mathcal{A}\}$, I - единичная матрица.

Действительно, если $x(t)$ – траектория, порожденная законом переключения $A(t)$, то замена \mathcal{A} на $\mathcal{A} + \alpha I$ дает траекторию $y(t) = e^{\alpha t}x(t)$.

2. Для любого i выполнено *свойство мажорирования*, то есть

$$\sigma(\mathcal{A}) \geq \sigma(A_i),$$

где $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$.

В самом деле, $\sigma(A_i)$ является показателем роста траектории соответствующей закону переключения $A(t) \equiv A_i$. Следовательно, эта траектория не превосходит траекторию максимального роста для семейства \mathcal{A} .

В дальнейшем, по умолчанию $\|\cdot\|$ – норма Ляпунова. $B = \{x \in R^d \mid \|x\| \leq 1\}$ - единичный шар инвариантной нормы, $S = \partial B$ - единичная сфера.

Достаточно построить выпуклое тело B , после чего норма определяется функционалом Минковского. Известно [4], что единичный шар инвариантной нормы характеризуется следующим свойством.

Для произвольной точки $X \in S$ вектор \mathbf{y} *касается в точке X*, если $\forall t > 0$ $y(t) = X + t\mathbf{y} \notin \text{int}B$.

Для построения инвариантных норм Ляпунова нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений, доказательства которых оставим до последующих разделов.

В случае, когда семейство \mathcal{A} состоит лишь из одной матрицы A , показатель Ляпунова вычисляется с помощью спектральной абсциссы матрицы A . Следующее утверждение общеизвестно.

Лемма 1. *Показатель Ляпунова семейства, состоящего лишь из одной матрицы, вычисляется непосредственно $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A) = \max\{\text{Re } \lambda \mid \lambda - \text{собственные значения } A\}$.*

Не ограничивая общности, будем предполагать, что набор не содержит нулевой матрицы, а сами матрицы не имеют общего собственного подпространства, и что семейство \mathcal{A} неприводимо, т.е. матрицы A_1, A_2, \dots, A_N не имеет общего действительного собственного вектора.

Достаточным условием положительности $\sigma(\mathcal{A})$ является существование бесконечно возрастающей траектории.

Лемма 2. Пусть для некоторого вектора \mathbf{x} и пары матриц A_1, A_2 выполняется:

1. Лепестки $A_1\mathbf{x}$ и $A_2\mathbf{x}$ лежат по разные стороны от \mathbf{x} .

2. Угол между $A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}$ в точке X не меньше π .

Тогда $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Заметно упрощает перебор случаев нижеприведенная теорема. Так, если хоть одна пара матриц имеет отрицательное направляющее значение, заключаем, что $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Теорема 1. Для пары матриц наличие хотя бы одного отрицательного направляющего значения гарантирует, что $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Примечательно, что в случае, когда мы подходим к направляющему вектору, соответствующему $\lambda > 0$, мы почти всегда в этой точке переключаемся на другую матрицу. Под “почти всегда” имеются в виду условия следующей теоремы.

Теорема 2. Если для пары матриц A_1, A_2 , вектора \mathbf{x} и числа $\lambda > 0$ выполняется $A_1\mathbf{x} = \lambda A_2\mathbf{x}$, и проекции векторов $A_1^2\mathbf{x}$ и $A_2^2\mathbf{x}$ на прямую l , перпендикулярную вектору $A_1\mathbf{x}$ не совпадают. Тогда в точке \mathbf{x} происходит переключение.

4. Постановка задачи

Точное описание максимального асимптотического роста системы дает так называемая инвариантная норма Ляпунова.

Определение 1. Инвариантной нормой называется норма $\|\cdot\|$ такая, что для всех траекторий выполнено неравенство $\|\bar{\mathbf{x}}(t)\| \leq e^{\sigma t} \|\bar{\mathbf{x}}_0\|$, и существует траектория $\bar{\mathbf{x}}$, для которой $\|\bar{\mathbf{x}}(t)\| = e^{\sigma t} \|\bar{\mathbf{x}}(t)\|$.

Геометрический смысл состоит в том, что единичный шар B в этой инвариантной норме имеет следующее описание: $\forall \mathbf{x} \in \partial B$ векторы $A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}, \dots, A_N\mathbf{x}$ направлены внутрь, и хотя бы один из них направлен по касательной. Тело B назовем инвариантным телом. Инвариантные нормы отвечают за максимальный рост траекторий, именно поэтому так важно построение инвариантных тел. Также максимальные траектории соответствуют границе инвариантного тела в двумерном случае.

Как было доказано Н. Барабановым [3] любая неприводимая система имеет инвариантную норму. Ее, однако, очень редко удается получить в явном виде, как правило, известно лишь существование. Тем не менее, мы покажем, что для двумерных систем инвариантная норма всегда вычисляется.

Для заданного семейства 2×2 -матриц $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Мы рассматриваем три задачи:

Задача 1. Определить верно ли неравенство $\sigma(\mathcal{A}) \leq 0$.

Задача 2. Вычислить $\sigma(\mathcal{A})$ с заданной точностью.

Задача 3. Построить инвариантную норму семейства \mathcal{A} .

Напомним, что мы имеем дело с неприводимым семейством матриц \mathcal{A} . Если \mathcal{A} приводимо, то инвариантной нормы может не существовать, при этом задачи 1 и 2 решаются элементарно. В самом деле, если \mathbf{v} - общий собственный вектор, то выберем произвольный вектор \mathbf{u} , не коллинеарный \mathbf{v} . В базисе $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$ матрицы семейства \mathcal{A} имеют верхнетреугольную форму $A_i = \begin{pmatrix} a_i & c_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}$. Тогда $\sigma(\mathcal{A}) = \max \sigma(A_i) = \max\{a_i, b_i\}$.

Задачи 1 – 3 будут решаться одновременно.

Из решения задачи 1 с помощью метода деления пополам получим решение задачи 2. Далее сдвигаем наше семейство на σI и для нового семейства решаем задачу 3.

Комментарий к задаче 3

В силу определения 1 для построения инвариантного тела, можно искать траектории максимального роста, в двумерном случае такие траектории строятся явно. Тут и появляется проблема невозможности обобщения алгоритма на случай большей размерности.

Чтобы не ограничиваться случаем $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, обобщим понятие инвариантной нормы. Далее считаем, что инвариантная норма есть у любого семейства матриц. В соответствии любому семейству матриц \mathcal{A} ставим инвариантное тело нормированной системы $\mathcal{A} - \sigma(\mathcal{A})\mathcal{I} = \{A_1 - \sigma(\mathcal{A})I, A_2 - \sigma(\mathcal{A})I, \dots, A_N - \sigma(\mathcal{A})I\}$.

Пусть заданы 2×2 -матрицы A_1, A_2, \dots, A_n и требуется вычислить показатель Ляпунова семейства $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ и построить инвариантную норму.

Мы предъявим метод для того, чтобы подтвердить или опровергнуть неравенство $\sigma(\mathcal{A}) \leq 0$, после этого приближенное значение показателя Ляпунова можно найти стандартным бинарным поиском. Из свойства сдвига показателя Ляпунова следует, что для семейства $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, где $C_i = A_i - \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_N)\} \cdot I$, выполнено $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{C}) + \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2), \dots, \sigma(A_N)\}$.

Сначала рассмотрим семейство из двух матриц и построим инвариантную норму для этого случая. Затем перейдем к решению задач для произвольного конечного семейства.

5. Вычисление показателя Ляпунова и инвариантной нормы системы из двух матриц

Так как $\sigma(\mathcal{A}) \geq \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2)\}$, то будем предполагать, что

$$\sigma(A_1), \sigma(A_2) \leq 0. \quad (2)$$

В противном случае, $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Траекторию, соответствующую закону переключения $A(t)$ обозначим $\gamma(A)$. Две кривые, соответствующие одному закону переключения (но разным начальным точкам), назовем подобными. Несложно доказать, что такие траектории действительно аффинно подобны. Для случая, когда A_i - вырожденная матрица, будем иметь еще одно обозначение ее траектории - ℓ_i .

5.1. Обе матрицы A_1 A_2 вырождены

Матрица A_1 вырождена, а значит одно из собственных значений равно 0. В силу леммы 1 и свойства 2 показателя Ляпунова, получаем оценку $\sigma(\mathcal{A}) \geq \sigma(A_1) \geq 0$. Требуется различать случаи $\sigma(\mathcal{A}) > 0$ и $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ и в последнем найти инвариантное тело. Рассмотрим ядра матриц $\text{Ker } A_1$ и $\text{Ker } A_2$. Проведем две различные прямые ℓ_1 и ℓ'_1 , симметричные относительно центра. Через точку пересечения $\text{Ker } A_1$ и ℓ_1 проведем прямую ℓ_2 .

Если точка пересечения $\text{Ker } A_2$ и ℓ_2 лежит внутри полосы между проведенными симметричными прямыми, то в силу нашего предположения (2), построенный параллелограмм и есть инвариантное тело. Назовем этот параллелограмм сингулярным.

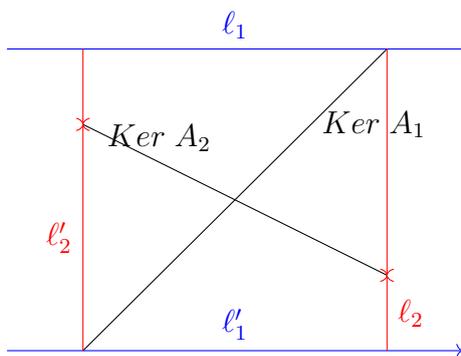


Рис. 5: Инвариантный многоугольник для случая двух матриц (сингулярный параллелограмм)

Таким образом, можем сформулировать следующее утверждение

Предложение 1. Если обе матрицы системы $\mathcal{A} = \{A_1, A_2\}$ вырождены и сингулярный параллелограмм существует, то $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ (т.е. точка пересечения $\text{Ker } A_2$ и $\text{Im } A_2$ лежит внутри полосы между проведенными симметричными прямыми), а последний задает инвариантную норму. Если же сингулярного параллелограмма нет (т.е. точка пересечения $\text{Ker } A_2$ и $\text{Im } A_2$ лежит вне полосы между симметричными прямыми), то получим $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Доказательство. Когда точка пересечения лежит вне полосы, существует траектория, уходящая на бесконечность, откуда следует, что $\sigma(\mathcal{A}) > 0$. Процесс построения бесконечно возрастающей траектории изображен на рисунке 1, где выбранная траектория отмечена пунктирной линией.

□

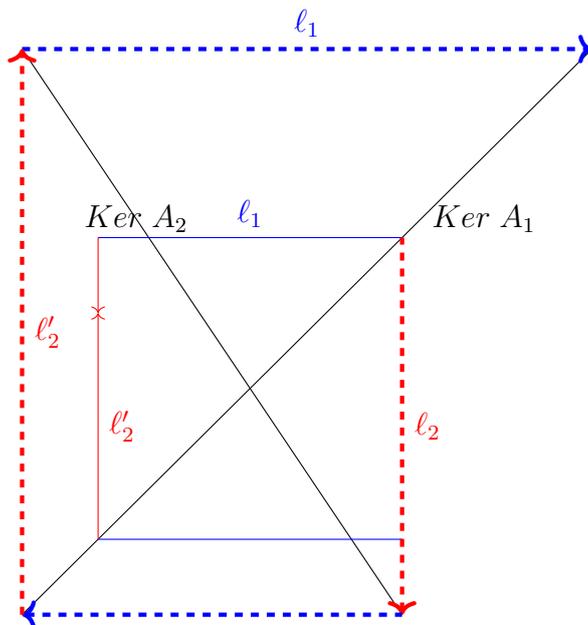


Рис. 6: Построение бесконечно возрастающей траектории в случае двух вырожденных матриц

5.2. Хотя бы одна из матриц невырожденная

Не ограничивая общности, считаем, что A_2 невырождена. Для определения знака показателя Ляпунова будем строить максимальные траектории. Заметим, что переключаться с одной матрицы на другую в точке X мы можем только (!) в случае, когда вектор $A_1\mathbf{x}$ параллелен вектору $A_2\mathbf{x}$, где $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$. Действительно, либо векторы $A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}$ лежат по одну сторону от вектора \overrightarrow{OX} , тогда для получения максимальной траектории, нужно пойти по самому высокому вектору из $A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}$, либо $A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}$ лежат по разные стороны от вектора \overrightarrow{OX} . В этом случае точку X будем называть зонтиком.

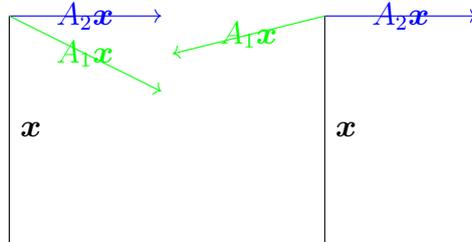


Рис. 7: конфигурация слева – лепестки $A_1\mathbf{x}$ и $A_2\mathbf{x}$ лежат по одну сторону от стебля \mathbf{x} в цветке $(\mathbf{x}, \{A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}\})$; конфигурация справа – лепестки $A_1\mathbf{x}$ и $A_2\mathbf{x}$ лежат по разные стороны от стебля \mathbf{x} в цветке $(\mathbf{x}, \{A_1\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}\})$

Докажем, что

Лемма 3. В любом зонтике для пары матриц A_1, A_2 не может быть переключения.

Доказательство. Рассмотрим зонтик X . В случае смены направления движения по границе тела, через короткий промежуток времени траектория окажется внутри инвариантного тела, что приведет нас к противоречию с выпуклостью инвариантного тела. \square

Отметим, что это не мешает нам начать движение в такой точке. Докажем, что такой случай невозможен.

Будем рассматривать такие \mathbf{x} , для которых существует $\lambda \in \mathbb{R}$, что выполняется $A_1\mathbf{x} = \lambda A_2\mathbf{x}$, т.е. λ корень уравнения $\det(A_1 - \lambda A_2) = 0$. Корни λ_1 и λ_2 назовем *направляющими значениями* для пары матриц A_1, A_2 . В зависимости от знака дискриминанта D квадратного уравнения и знаков его корней λ_1 и λ_2 получаем несколько случаев.

5.2.1. Случай $D < 0$

В предполагаемых условиях, если для какой-то из матриц существует инвариантное тело, то оно будет являться инвариантным телом и для \mathcal{A} . Отсутствие корней равносильно тому, что траектория не имеет переключений, это значит, что в каждый момент точка является зонтиком, либо какая-то одна из матриц мажорирует другую. Если у нас есть зонтик, то он единственен, так как зонтичное переключение в данном случае – начальная точка. В то же время инвариантное тело обладает свойством центральной симметричности, а значит, у него не может быть среди точек переключений ровно одно зонтичное переключение. Тем самым заключаем,

Предложение 2. В случае, когда одна из матриц невырождена, и $D < 0$, инвариантным телом для \mathcal{A} является инвариантное тело одной из двух матриц.

Пусть для определенности $\sigma(A_1) \geq \sigma(A_2)$. Тогда максимальная траектория для A_1 будет максимальной и для \mathcal{A} . Следовательно, $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A_1)$.

5.2.2. Случай $D = 0, \lambda_1 > 0$

Как и в предыдущем случае, зонтичных переключений нет в силу леммы 4. Возможна только одна пара симметричных точек переключения. В то же время, в силу симметрии, на обеих полуплоскостях, разбитых соединяющей эти точки прямой, мажорирует одна и та же матрица. Таким образом, доказано

Предложение 3. *В случае, когда матрица A_2 невырождена, $D = 0$, $\lambda_1 > 0$, имеем $\sigma(\mathcal{A}) = \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2)\}$*

5.2.3. Случай $D = 0$, $\lambda_1 < 0$

В силу теоремы 1 остается разобрать вариант пропорциональных матриц A_1, A_2 . Но в таком случае $\sigma(A) \geq \max\{\sigma(A_1), \sigma(A_2)\} \geq 0$, и последнее неравенство обращается в равенство только при $\sigma(A_1) = \sigma(A_2) = 0$. Действительно, инвариантное тело для любой из матриц является также инвариантным телом для \mathcal{A} .

Предложение 4. *В случае $D = 0$, $\lambda_1 < 0$, если у обеих матриц показатель Ляпунова равен 0, то инвариантное тело любой из матриц является инвариантным телом для системы.*

5.2.4. A_2 невырождена, $D = 0$, $\lambda_1 = 0$

Поскольку $\lambda_1 = 0$, то для матрицы A_1 показатель Ляпунова $\sigma(A_1) = 0$, следовательно, $\sigma(\mathcal{A}) \geq 0$.

Уравнение $A_2 \mathbf{z} = \mathbf{b}$ для любого вектора \mathbf{b} имеет решение \mathbf{z} , причем единственное. Возьмем вектор \mathbf{b} , параллельный ℓ_1 , тогда вектор \mathbf{z} должен быть сонаправлен с $\text{Ker } A_1$, иначе получим противоречие с условием $D = 0$. Рассмотрим траекторию, порожденную матрицей $-A_2$ и выходящую из точки \mathbf{x} до точки пересечения с прямой, соответствующей ℓ_1 . В силу данных условий траектории пересекаются под углом, не превосходящем π , причем, если точка пересечения не принадлежит $\text{Ker } A_1$ то угол строго меньше π . В обоих случаях инвариантное тело получается из построенной половинки путем центрально-симметричного отражения.

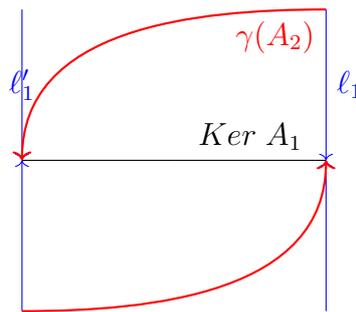


Рис. 8: Инвариантное тело для случая $D = 0$, $\lambda_1 = 0$

5.2.5. A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

В этом случае, как показано ниже, показатель Ляпунова положительный.

Теорема 1. *Для любого числа матриц наличие хотя бы одного отрицательного направляющего значения гарантирует, что $\sigma(\mathcal{A}) > 0$*

Доказательство. Достаточно доказать для пары матриц. Пусть для двух матриц A_1, A_2 направляющие значения λ_1, λ_2 такие, что $\lambda_1 > \lambda_2$ и $\lambda_2 < 0$. А векторы \mathbf{x} и \mathbf{h} такие, что выполняется $A_1\mathbf{x} = \lambda_2 A_2\mathbf{x}$, $A_1\mathbf{h} = \lambda_1 A_2\mathbf{h}$, где h достаточно мало. Векторы \mathbf{h}, \mathbf{x} лежат по одну сторону в цветке $A_2\mathbf{x}, \mathbf{h}, \mathbf{x}$. Тогда, в зависимости от знака λ_1 , имеем три случая. При $\lambda_1 > 0$ центральный угол между векторами $A_1(\mathbf{h} + \mathbf{x}), A_2(\mathbf{h} + \mathbf{x})$ в точке X больше π и из условия, что \mathbf{h} достаточно мало, в точке $X + \mathbf{h}$ так же больше π , откуда следует утверждение теоремы.

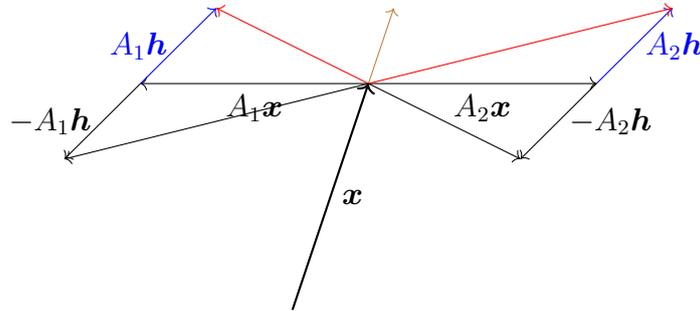


Рис. 9: Случай $\lambda_1 > 0$

При $\lambda_1 = 0$ векторы $A_1(\mathbf{h} + \mathbf{x}) = A_1\mathbf{x}$, $A_2(\mathbf{h} + \mathbf{x})$ образуют центральный угол больший π .

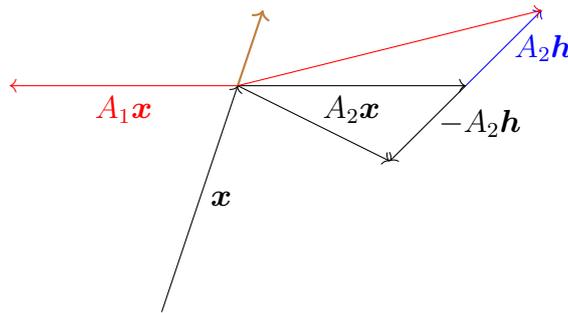


Рис. 10: Случай $\lambda_1 = 0$

И наконец, рассмотрим случай $\lambda_1 < 0$. Пусть без ограничения общности $\frac{\|A_1\mathbf{h}\|}{\|A_1\mathbf{x}\|} \geq \frac{\|A_2\mathbf{h}\|}{\|A_2\mathbf{x}\|}$. $\|A_1\mathbf{h}\| \geq \frac{\|A_2\mathbf{h}\|\|A_1\mathbf{x}\|}{\|A_2\mathbf{x}\|}$. Тогда из подобия треугольников вновь получим центральный угол между векторами $A_1(\mathbf{h} + \mathbf{x}), A_2(\mathbf{h} + \mathbf{x})$ больше π .

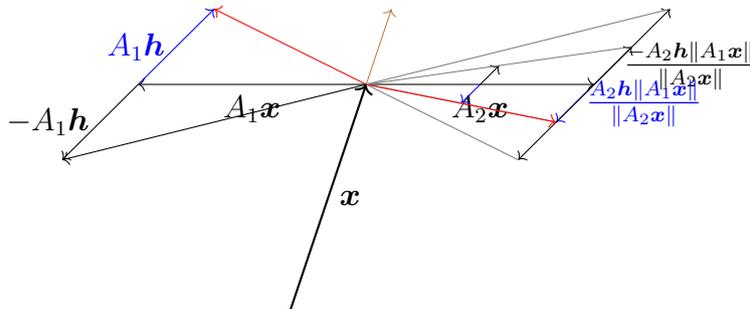


Рис. 11: Случай $\lambda_1 < 0$

□

5.2.6. A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

В данных условиях выполнена теорема 1, что дает нам оценку $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

5.2.7. A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$

Как и в первых двух случаях, зонтичных переключений быть не может, и максимальная траектория находится явно. Действительно, на всех векторах, кроме d_1, d_2 , определен высокий вектор, причем в дальнейшем мы покажем, что в точках, где векторы $A_1 x$ $A_2 x$ параллельны, у нас обязательно происходит переключение. Таким образом, начав с любого направления и вернувшись в него через какое-то время, по соотношению длин начального и конечного векторов можем вычислить знак $\sigma(\mathcal{A})$. А в случае если эти длины совпадут, получим в точности инвариантное тело.

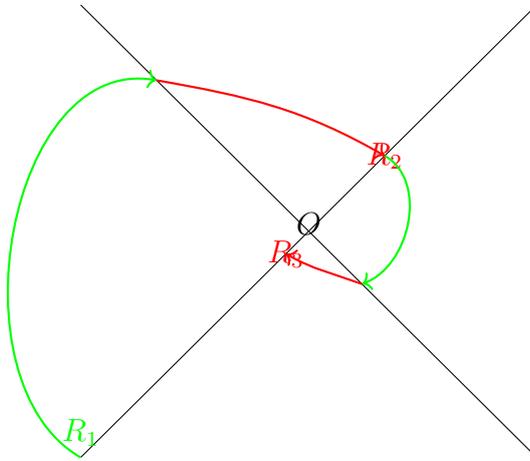


Рис. 12: Построение максимальной траектории в случае положительных собственных значений

5.2.8. A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$

Для начала, будем считать, что матрица A_2 не имеет действительных собственных значений. Покажем, что в этом случае $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ и построим инвариантное тело. Рассмотрим прямые MM' , AA' , проходящие через точку O и соответствующие направлениям d_2, d_1 . Из точки M по матрице $-A_2$ пустим траекторию, так как $\sigma(-A_2) = -\sigma(A_2) > 0$, она пересечет прямую, параллельную ℓ_1 и проходящую через точку A' , причем до пересечения с прямой AA' в некоторой точке C . Симметрично отразив относительно AA' дугу MC , получим инвариантное тело.

Пусть теперь собственные значения матрицы A_2 – вещественные числа. A_2 невырождена и $\sigma(A_2) \leq 0$, откуда следует, что собственные значения матрицы A_2 отрицательны. Соответствующие собственные векторы обозначим r_1, r_2 . Из теоремы 1 следует, что матрица A_2 доминирует до точки M' . Также отметим, что в r_1, r_2 доминирует матрица B_1 . Из наших рассуждений получим, что этот случай не отличается от предыдущего.

5.2.9. A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$

В силу теоремы 1 $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

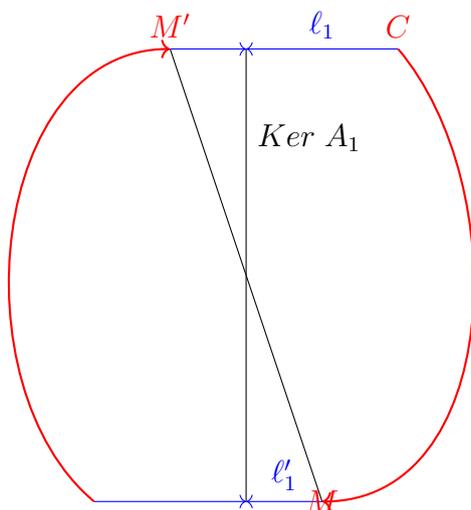


Рис. 13: Инвариантное тело в случае вырожденной и невырожденной матриц

6. Случай вырожденных матриц: Инвариантные многоугольники

Если все матрицы семейства \mathcal{A} вырождены и $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, инвариантным телом будет многоугольник. Чтобы это показать начнем со следующей леммы.

Лемма 4. *Заданы невырожденные 2×2 - матрицы A_1, A_2, \dots, A_n и вырожденные ненулевые 2×2 - матрицы B_1, \dots, B_m . Если $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\{A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}) = 0$, то для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ среди точек касания инвариантного тела M семейства \mathcal{A} с $Im \{B_i\}$ есть точка ядра $Ker B_i$.*

Доказательство. Допустим противное: существует i такое, что l_i пересекает $Im \{B_i\}$ в точке ядра $Ker B_i$. Что противоречит свойству инвариантного тела.

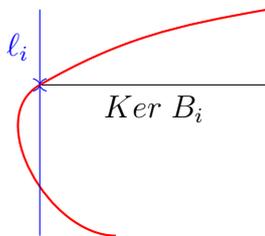


Рис. 14: Доказательство леммы 4

□

Пусть все матрицы в рассматриваемом семействе $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ вырожденные. Требуется отличать случаи $\sigma(\mathcal{A}) > 0$ и $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ и в последнем строить инвариантное тело.

Каждая из матриц “включается” около своего ядра (лемма 3) и только там (в силу выпуклости инвариантного тела). Тогда, если все матрицы семейства \mathcal{A} вырожденные, в качестве инвариантного тела имеем многоугольник.

Вновь пользуясь леммой 3, заключаем, что для построения многоугольника достаточно знать для каждой матрицы i , на каком расстоянии x_i от O по $Ker A_i$ расположена прямая l_i . Длины отрезков, которые прямая l_i отсекает на прямых $Ker A_{i-1}$ и $Ker A_{i+1}$ назовем $a_i x_i$ и $b_i x_i$ соответственно. Рассмотрим систему

$$\prod_{j=1}^n b_j \geq 1; \quad \prod_{j=1}^n a_j \geq 1; \quad b_i a_{i+1} \geq 1 \quad i = 1, \dots, n. \quad (3)$$

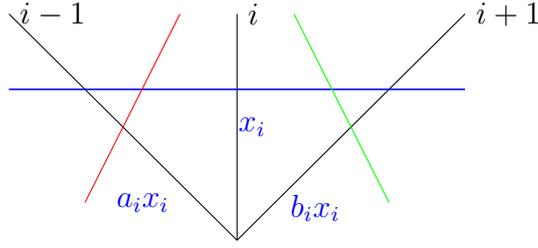


Рис. 15: Процесс построения инвариантного многоугольника

Теорема 3. Если все матрицы семейства \mathcal{A} вырожденные, то $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ тогда и только тогда, когда система (1) имеет решение. В этом случае, любое инвариантное тело системы (1) является симметричным $2n$ -угольником со сторонами, параллельными ℓ_i . Если система не имеет решения, то $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

Доказательство. На x_{i-1} и x_{i+1} накладываются неравенства $x_{i-1} \geq a_i x_i$ и $x_{i+1} \geq b_i x_i$, которые записываются в виде системы следующим образом (считаем, что $x_{n+1} = x_1$):

$$\begin{cases} a_i x_i \geq x_{i-1}, & i = 1, \dots, n, \\ b_i x_i \geq x_{i+1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Сдвинем нумерацию во второй строке:

$$\begin{cases} a_{i+1} x_{i+1} \geq x_i, \\ b_i x_i \geq x_{i-1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{1}{a_{i+1}} \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5)$$

Положим $S_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$. Тогда $S_1 S_2 \dots S_n = 1$. Ясно, что нахождение S_1, S_2, \dots, S_n равносильно поиску значений x_1, \dots, x_n .

Лемма 5. Для существования решения системы (3) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие неравенства:

1. $\prod_{j=1}^n b_j \geq 1$
2. $\prod_{j=1}^n a_j \geq 1$
3. $b_i a_{i+1} \geq 1$

Доказательство. Необходимость условий следует из неравенства, полученного от перемножения (4) по всем i и самого неравенства (4) для каждого i в частности

$$\prod_{j=1}^n \frac{1}{a_j} \leq 1 \leq \prod_{j=1}^n b_j$$

$$\frac{1}{a_{i+1}} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Осталось показать достаточность условий 1 – 3. Рассмотрим функцию $f(\alpha, x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$. При $\alpha \in [0, 1]$, $a, b > 0$ выполняется

$$\min(x, y) \leq f(\alpha, x, y) \leq \max(x, y)$$

Действительно, фиксируем x, y , и предположим $x \leq y$. Тогда $f(\alpha, x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha} = (\frac{x}{y})^\alpha y$. Так как $\frac{x}{y} \leq 1$, то выполняется $x = f(1, x, y) \leq f(\alpha, x, y) \leq f(0, x, y) = y$ для любого $\alpha \in [0, 1]$.

В силу непрерывности по переменной α функция $f(\alpha, x, y)$ принимает все значения на отрезке $[x, y]$. Пусть $A = \prod_{j=1}^n a_j \geq 1$, $B = \prod_{j=1}^n b_j \geq 1$ а α_0 такое, что $f(\alpha_0, \frac{1}{A}, B) = 1$. Тогда в качестве S_i возьмем $f(\alpha_0, \frac{1}{a_i}, b_i)$. Очевидно, что S_i -решение системы (1). \square

Решение не учитывает случай, когда существует какое-то a_i (или b_i) равное ∞ (ведь прямые могут просто не пересекаться). В этом случае, очевидно, выполняется соответствующее неравенство. Чтоб найти конструктивное решение, вместо $a_i = \infty$ возьмем такое достаточно большое a_i , чтобы все неравенства 1 – 3 выполнялись. Нетрудно заметить, что найденное решение является решением и исходной задачи.

Отметим, что решение неединственное, так как конструктивное решение в лемме 5 можно немного “подвигать” так, чтобы неравенства выполнялись. \square

Если система имеет решение, то любой инвариантный многоугольник системы (1) строится по приведенному алгоритму, и, наоборот, каждое решение порождает инвариантный многоугольник.

7. Построение инвариантной нормы для произвольного числа матриц

Даны $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$. Если среди матриц A_j есть вырожденные, то поставим их в конец списка: A_1, A_2, \dots, A_n - невырожденные, A_{n+1}, \dots, A_{n+m} -вырожденные, $n + m = N$. Для удобства будем обозначать $B_j = A_{n+j}$.

Пусть теперь заданы невырожденные 2×2 - матрицы A_1, A_2, \dots, A_n и вырожденные ненулевые 2×2 - матрицы B_1, \dots, B_m ($n + m \geq 3$). Требуется вычислить показатель Ляпунова семейства \mathcal{A} . Будем искать приближенное значение показателя Ляпунова, вновь пользуясь бинарным поиском и действуя в предположениях $\sigma(A_j) \leq 0$, $j = 1, \dots, N$.

Для каждой пары матриц A_i, B_j найдем направляющие значения и возможные точки переключения. Отметим некоторые свойства.

1. Если среди $n + m$ матриц есть пара с хотя бы одним отрицательным направляющим значением, то в силу теоремы 1 $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.
2. Если все направляющие значения положительны, то в каждой сингулярной точке можно однозначно определить наличие переключения и результат переключения (т.е. определить на какую матрицу произошло переключение). Следовательно, максимальная траектория восстанавливается однозначно. Тем самым точно определить знак $\sigma(\mathcal{A})$.
3. Отдельный случай $n = 0$.

Учитывая три данных свойства, можем считать, что все направляющие значения неотрицательны, причем среди них хотя бы одно положительное и хотя бы одно равное нулю. Последнее условие равносильно существованию вырожденной матрицы.

4. Будем считать, что в семействе $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ нет пропорциональных матриц. Отрицательный коэффициент подобия даст отрицательное направляющее значение (свойство 1). А рассмотрение двух матриц с положительным коэффициентом подобия не имеет смысла. Одну можно убрать из семейства без всяких потерь.

В любой точке X определяется положительный и отрицательный наборы матриц. И если в алгоритме для двух невырожденных матриц не допускалось образование зонтичных переключений из-за того, что начальная точка могла быть только одна, а движение у нас безостановочное. В общем случае для n матриц это рассуждение не работает, так как ядра

невырожденных матриц являются как раз остановками на пути траектории.

Также обратим внимание, что в предположениях 1-3 переключение в каждой точке по часовой стрелке (против часовой стрелки) определяется однозначно, таким образом, получаем закон положительный (отрицательный) переключения $\bar{A}^+(t)$ ($\bar{A}^-(t)$), при котором траектория $\bar{x}(t)$ имеет максимальный рост. Траектория $\bar{x}(t)$ строго выпуклая. Тогда случай $m = 1$ решается таким же методом, что мы использовали для определения знака показателя Ляпунова в случае двух матриц A_1 и A_2 , когда A_2 невырождена, $D > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$.

Теперь перейдем к построению инвариантной нормы:

8. Алгоритм построения инвариантной нормы для N матриц

Рассмотрим ядра матриц B_1, B_2, \dots, B_m . Без ограничения общности будем предполагать, что они расположены согласно нумерации матриц. Проведем две различные прямые, симметричные относительно центра и параллельные $Im B_1$. Согласно лемме 3 инвариантная функция содержит по точке ядра каждой из матриц B_1, B_2, \dots, B_m . Значит, максимальная траектория должна содержать отрезок на $Im B_1$ (возможно, вырожденный в точку).

В точке переключения соответствующей B_1 и $\bar{A}^+(t)$ сойдем на режим $\bar{A}^+(t)$ и дойдем до $Ker B_2$, если мы не пересеклись ранее с $Ker B_2$. Если же пересечение с $Ker B_2$ произошло раньше, то весь отрезок, соответствующий $Im B_1$ между $Ker B_1$ и $Ker B_2$ содержится в максимальной траектории. Действительно, это значит, что на всем участке между ядрами мажорирует матрица B_1 , а значит и переключаться на A^+ не надо. В точке траектории, лежащей на $Ker B_2$, имеем две возможности вхождения относительно $Im B_2$: со стороны центра и по другую сторону. В первом случае переключаемся на матрицу B_2 . Во втором случае получаем бесконечно возрастающую траекторию, что сразу нам дает $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

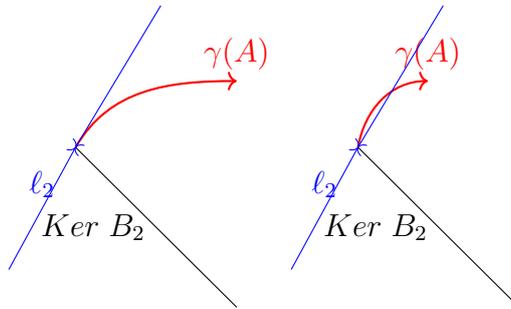


Рис. 16: Процесс возвращения

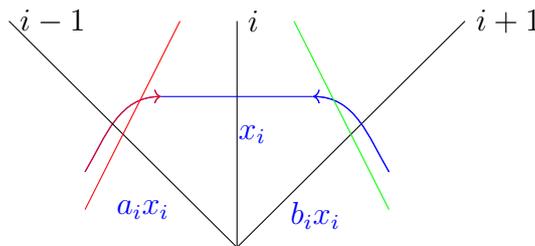


Рис. 17: Процесс построения инвариантного тела

Аналогично, пройдем по отрицательному набору от $Ker B_1$ до $Ker B_m$. А теперь повторим шаги из пункта для n вырожденных матриц. Для построения тела достаточно знать

для каждой матрицы i , на каком расстоянии x_i от O по $Ker B_i$ расположена точка инвариантного тела. Длины отрезков, которые объединение положительной и отрицательной траектории высекают на прямых $Ker B_{i-1}$ и $Ker B_{i+1}$ назовем $a_i x_i$ и $b_i x_i$ соответственно.

$$\begin{cases} a_i x_i \geq x_{i-1}, & i = 1, \dots, n, \\ b_i x_i \geq x_{i+1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Сдвинем нумерацию во второй строке:

$$\begin{cases} a_{i+1} x_{i+1} \geq x_i, \\ b_i x_i \geq x_{i-1}, & i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{1}{a_{i+1}} \leq \frac{x_{i+1}}{x_i} \leq b_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7)$$

Пусть $S_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$. Тогда $S_1 S_2 \dots S_n = 1$. Найденные S_1, S_2, \dots, S_n будут однозначно определять x_1, \dots, x_n .

Лемма 6. Для существования решения системы (3) необходимо и достаточно, чтобы существовало решение системы

$$\prod_{j=1}^n b_j \geq 1; \quad \prod_{j=1}^n a_j \geq 1; \quad b_i a_{i+1} \geq 1 \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Доказательство данного утверждения повторяет доказательство леммы 4.

Таким образом, доказано

Теорема 4. Если матрицы системы \mathcal{A} удовлетворяют условиям 1 – 3, то $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ тогда и только тогда, когда система (6) имеет решение. В этом случае, любое инвариантное тело системы (6) строится по предъявленному алгоритму. Если система не имеет решения, то $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

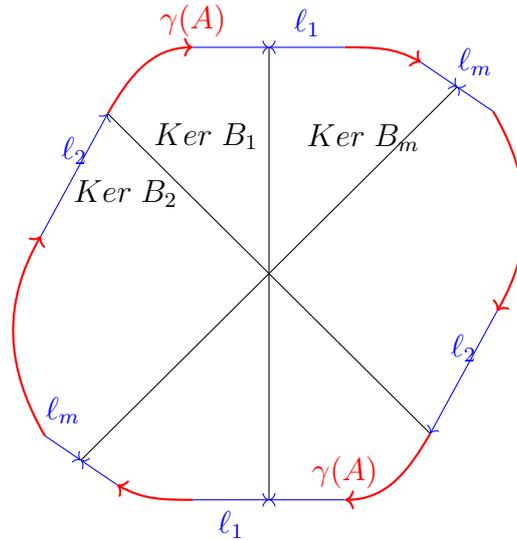


Рис. 18: Пример инвариантного тела, полученного с помощью алгоритма 2

Теорема 5. Для любого семейства матриц алгоритм 2 за конечное время либо определяют, какое из неравенств верно $\sigma(\mathcal{A}) > 0$ или $\sigma(\mathcal{A}) \leq 0$. В случае, $\sigma(\mathcal{A}) = 0$ алгоритм строит инвариантную норму.

9. Классификация инвариантных норм Ляпунова

Представленный в параграфах 6-8 алгоритм построения инвариантных норм Ляпунова фактически дает полную классификацию таких норм. Если в рассматриваемой системе присутствует хоть одна вырожденная матрица, и $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, то инвариантная норма \mathcal{A} неединственная. Единственность зависит от наличия доминирующих матриц. Напомним, что A_i называется доминирующей, если $\sigma(A_i) = \sigma(\mathcal{A})$. Напомним также, что семейство матриц \mathcal{A} неприводимо. Таким образом, свойство инвариантного тела можно переформулировать :

Теорема 6. *Любое инвариантное тело конечного семейства матриц имеет кусочно-аналитическую границу. Все инвариантные нормы получаются с помощью алгоритма 2. В случае, когда нет доминирующих матриц, норма с точностью до умножения на константу единственна, и в случае, когда доминирующая матрица есть, инвариантных норм бесконечное семейство.*

Замечание. Из алгоритма 2 неочевидно, что мы построили все траектории. Ведь не исключается случай, бесконечного числа точек переключений, при котором некоторые из наших рассуждений не проходят.

Доказательство. Из свойства инвариантного тела верно, что в каждой точке \mathbf{x} хотя бы один из векторов $A_i\mathbf{x}$, $i = 1, \dots, N$ является касательным вектором к инвариантному телу (совпадает с касательной слева или справа в точке \mathbf{x}).

Точками первого типа назовем точки \mathbf{x} , где ровно один из векторов $A_i\mathbf{x}$, $i = 1, \dots, N$ является касательным вектором к телу в точке \mathbf{x} . Множество всех таких точек обозначим за M_1 . Остальные точки назовем *точками второго типа*, и соответствующее множество обозначим за M_2 .

Заметим, что M_1 - открытое множество. Теперь покажем, что M_2 конечно.

Пусть $\mathbf{x} \in M_2$, тогда возможны два случая:

- хотя бы два вектора $A_i\mathbf{x}$, $A_j\mathbf{x}$ ($i \neq j$) совпадают с касательной слева (справа), а значит, сами векторы коллинеарны. То есть \mathbf{x} является решением уравнения $A_i\mathbf{x} = \lambda A_j\mathbf{x}$ ($i \neq j$) для некоего λ . Всего таких точек конечное число, так как для их нахождения необходимо рассмотреть уравнения $A_i\mathbf{x} = \lambda A_j\mathbf{x}$ ($i \neq j$), у каждого из которых не больше двух решений. Таких уравнений C_N^2 .
- есть пара векторов $A_i\mathbf{x}$, $A_j\mathbf{x}$ ($i \neq j$) таких, что $A_i\mathbf{x}$ совпадает с касательной слева, $A_j\mathbf{x}$ ($i \neq j$) совпадает с касательной справа, а сами касательные слева и справа различны. То есть имеется зонтичное переключение. Если для каждого из зонтичных переключений можно выбрать окрестность такую, что в ней больше нет других зонтичных переключений, то из компактности будет следовать то, что таких точек конечное число. Остается показать, что любое зонтичное переключение изолировано.

В противном случае множество точек переключений имеет предельную точку L .

Пусть внешний угол в точке L равен $\alpha > 0$ (он не может равняться нулю, так как в этом случае $\sigma(\mathcal{A}) > 0$, и инвариантного тела не существует). Так как в любой достаточно малой окрестности L лежит бесконечно много зонтичных переключений, и угол раствора меняется непрерывно, мы имеем, что сумма внешних углов данного инвариантного тела равна ∞ . Но известно, что сумма внешних углов выпуклого плоского множества не превышает 2π . Получили противоречие. Значит, M_2 - конечное множество. Вся граница тела разбивается на M_1 и M_2 , где первое множество открыто, а второе конечно. Т.е. вся

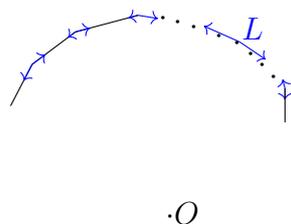


Рис. 19: Бесконечное число зонтичных переключений

граница тела разбивается на открытые дуги, каждая из которых задается кривой $x(t)$ – решением уравнения $\dot{x} = Ax$, где $A \in \mathcal{A}$ – постоянная матрица. Таким образом, доказано, что инвариантное тело имеет кусочно-гладкую границу. Между двумя ядрами не может быть несколько зонтичных переключений. Действительно, в таком случае найдется точка x , в которой угол между какими-то лепестками $A_i x$ больше π , а значит $\sigma(\mathcal{A}) > 0$.

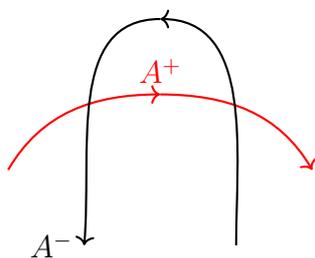


Рис. 20: Пересечение двух траекторий разных направлений

Получили, что из конечности зонтичных переключений и алгоритма следует полная классификация. \square

Из алгоритма 2 следует, что если система не содержит доминирующих матриц, то инвариантно тело единственно. Иначе, инвариантных тел бесконечно много, и все они строятся с помощью алгоритма 2.

Для произвольной системы матриц случай невырожденный, когда $\sigma(\mathcal{A}) > \sigma(A_i)$ для любого i . Сдвигами нормируем все семейство, чтоб $\sigma(\mathcal{A}) = 0$. Тогда все $\sigma(A_i) < 0$, что соответствуют случаю, когда все матрицы A_i невырожденны. В случае, когда все матрицы невырожденные, инвариантная норма единственная.

Замечание. Все построения ведутся в предположении отсутствия общего собственного подпространства. В случае двух вырожденных матриц это означает, что обе матрицы имеют различные ядра. Но если имеется 3 и более матриц, вообще говоря, некоторые пары вырожденных матриц могут иметь общие ядра. В таком случае рассматриваем самые высокие лепестки, подходящие справа и слева к ядру, и их объединение называем образом новой вырожденной матрицы, которую будем рассматривать вместо изначальных. Заметим, что алгоритм 2 все так же работает.

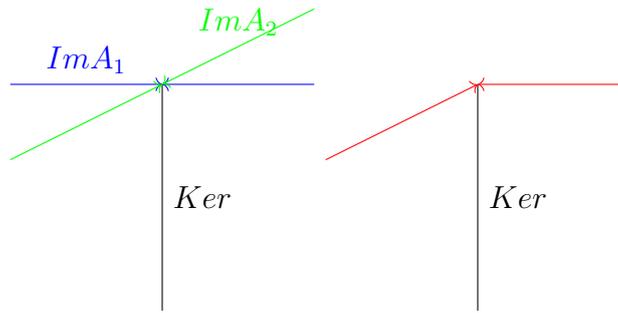


Рис. 21: Матрицы A_1 и A_2 имеют одинаковые ядра

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность профессору В.Ю. Протасову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

- [1] *Liberzon D.*, Switching in systems and control, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2003.
- [2] *Molchanov A. P. and Pyatnitskiy Y. S.*, Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory, Systems Control Lett., 13 (1989), no 1, 59–64.
- [3] *Barabanov N. E.*, Absolute characteristic exponent of a class of linear nonstationary systems of differential equations, Siberian Math. J. 29 (1988), 521–530.
- [4] *Guglielmi N., Laglia L., Protasov V. Yu.*, Polytope Lyapunov functions for stable and for stabilizable LSS, Found. Comput. Math., 17 (2017), no 2, 567–623.
- [5] *Protasov V. Yu.*, The Barabanov norm is generically unique, simple, and easily computed, to appear in SIAM J. Optimiz. Control. (2022), arXiv:2109.12159.
- [6] *Liberzon D. and Morse A. S.*, Basic problems in stability and design of switched systems. IEEE Control Systems Magazine, 19 (1999), 59–70.
- [7] *Blanchini F, Miani S.*, Piecewise-linear functions in robust control, Robust control via variable structure and Lyapunov techniques (Benevento, 1994), 213–243, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 217, Springer, London, 1996.
- [8] *Blanchini F., Miani S.*, A new class of universal Lyapunov functions for the control of uncertain linear systems, IEEE Trans. Automat. Control, 44 (1999), no 3, 641–647.
- [9] *Balde M., Boscain U., Mason P.*, A note on stability conditions for planar switched systems, Internat. J. Control, 82 (2009), no 10, 1882–1888.
- [10] *Balde M., Boscain U.*, Stability of planar switched systems: the nondiagonalizable case, Commun. Pure Appl. Anal., 7 (2008), no 1, 1–21.
- [11] *Benaïm M., Le Borgne S., Malrieu F., Zitt P.*, On the stability of planar randomly switched systems, Ann. Appl. Probab., 24 (2014), no 1, 292–311.
- [12] *Boscain U.*, A review on stability of switched systems for arbitrary switchings. Geometric control and nonsmooth analysis, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 76 (2008), World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 100–119.

- [13] *Cong S.*, Stability analysis for planar discrete-time linear switching systems via bounding joint spectral radius, *Systems Control Lett*, 96 (2016), 7-10.
- [14] *Protasov V. Yu.*, The joint spectral radius and invariant sets of linear operators, *Fundam. Prikl. Mat.*, 2 (1996), no 1, 205-231.
- [15] *Kozyakin V.*, Iterative building of Barabanov norms and computation of the joint spectral radius for matrix sets, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14 (2010), no 1, 143-158.
- [16] *Protasov V. Yu.*, On the smoothness of de Rham curves, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 68 (2004), no 3, 139-180.
- [17] *Protasov V. Yu.*, Fractal curves and wavelets, *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 70 (2006), no 5, 123-162.
- [18] *Blondel V. D., Theys J., Vladimirov A. A.*, An elementary counterexample to the finiteness conjecture, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 24 (2003), no 4, 963-979.
- [19] *Kozyakin V.*, On the computational aspects of the theory of joint spectral radius, *Dokl. Akad. Nauk*, 427 (2009), no 2, 160-164.
- [20] *Tsitsiklis J.N., Blondel V.D.*, The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard—when not impossible—to compute and to approximate, *Math. Control Signal Systems*10(1997), 31–40
- [21] *Hare K.G., Morris I.D., Sidorov N., Theys J.*, An explicit counterexample to the Lagarias-Wang finiteness conjecture, *Adv. Math.* 226(2011), No. 6, 4667-4701 .
- [22] *Morris I. D., Sidorov N.*, On a devil’s staircase associated to the joint spectral radii of a family of pairs of matrices, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 15 (2013), No. 5, 1747-1782 .
- [23] *Cicone A., Guglielmi N.; Serra-Capizzano S.; Zennaro M.*, Finiteness property of pairs of 2×2 sign-matrices via real extremal polytope norms, *Linear Algebra Appl.* 432(2010), No. 2-3, 796-816 .
- [24] *Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Skopina M.*, Wavelet theory, AMS, Translations Mathematical Monographs, V. 239 Richmond, USA