Константа Жордана для группы Кремоны ранга 2 над конечным полем

АНАСТАСИЯ В.ВИКУЛОВА

Аннотация. В этой работе мы найдем явные константы Жордана для группы Кремоны ранга 2 над всеми конечными полями. В процессе доказательства мы строим кубическую поверхность над полем $\mathbb{F}_2$ с действием группы S_6, которая является самой большой группой автоморфизмов для кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$. Также мы докажем единственность с точностью до изоморфизма кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$, на которой действует группа S_6.

1. Введение

Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_n(\mathbf{F})$ ранга n — это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n$ над полем $\mathbf{F}$. Несмотря на то, что она возникает очень естественно, ее структура является очень сложной при $n \geqslant 2$. Более того, даже описание конечных подгрупп этой группы является чрезвычайно трудоемким делом.Уже в первом нетривиальном случае ранга 2 были классифицированы классы сопряженности конечных подгрупп только над $\mathbb{C}$ (см. [7]). Тем не менее, мы можем понять, какими свойствами могут обладать конечные подгруппы группы Кремоны.

Определение 1.1 ([10, Definition 2.1])**.** Группа G называется *жордановой*, если существует константа J такая, что любая конечная подгруппа группы G имеет нормальную абелеву подгруппу индекса не больше чем J. Минимальная такая константа J называется *константой Жордана* группы G и обозначается $J(G)$.

Ж.-П. Серром в [12, Theorem 5.3] было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ ранга 2 над полем $\mathbf{F}$ характеристики нуль является жордановой. Однако для алгебраически замкнутого поля $\mathbf{F}$ характеристики $p > 0$ этот факт уже неверен, так как в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbf{F})$ имеются простые подгруппы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^n})$, порядок которых растет с ростом n. В статье [11] Ю.Г. Прохоровым и К.А. Шрамовым было доказано, что группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — поле из q элементов, жорданова. Более того, они получили следующие оценки на константу Жордана.

Теорема 1.2 ([11, Theorem 1.2])**.** *Пусть* $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ *— константа Жордана для группы Кремоны* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$*. Тогда*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = q^3(q^2-1)(q^3-1), \qquad \text{если } q \notin \{2,4,8\};$$
$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) \leqslant 696\,729\,600, \qquad \text{если } q \in \{2,4,8\}.$$

Наша цель — найти точное значение константы Жордана для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ при $q \in \{2,4,8\}$. С этой целью нам достаточно изучить группы бирегулярных автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ над полем $\mathbb{F}_q$, поскольку любая конечная подгруппа G группы $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Согласно [11, Corollary 5.3] и [11, Lemma 6.1], для расслоений на коники над $\mathbb{P}^1$ и для поверхностей дель Пеццо степени $4 \leqslant d \leqslant 9$ и $d = 2$ оценка на константу Жордана группы автоморфизмов не больше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$, что является порядком группы автоморфизмов $\mathbb{P}^2$. Поэтому нам нужно изучить группы регулярных действий на поверхности дель Пеццо степени 1 и 3, и нормальные абелевы подгруппы в этих группах, чем мы и будем заниматься.

В этой работе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.3. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} 16\,482\,816 & \text{при } q = 8; \\ 60\,480 & \text{при } q = 4; \\ 720 & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

Следствие 1.4. *Константа Жордана $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q))$ для группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ равна*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|, & \text{если } q \neq 2; \\ |\mathrm{S}_6| > 168 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)| & \text{при } q = 2. \end{cases}$$

В качестве дополнения к доказательству теоремы 1.3 мы выведем следующий факт об автоморфизмах кубической поверхности над полем $\mathbb{F}_2$.

Теорема 1.5. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда порядок ее группы автоморфизмов удовлетворяет неравенству*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Если равенство выполнено, то $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$. Более того, кубика с группой автоморфизмов S_6 единственна с точностью до изоморфизма.

Благодарности. Автор считает приятным долгом выразить искреннюю благодарность К.А.Шрамову за постановку задачи, за постоянное внимание к этой работе и интересные беседы. Автор также благодарит А.С.Трепалина за разговоры о кубических поверхностях и Ю.Г.Прохорова за важные замечания.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00121).

2. Гладкие кубические поверхности

Как известно, группа автоморфизмов гладкой кубической поверхности в $\mathbb{P}^3$ вкладывается в группу Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ (см., например, [5, Corollary 8.2.40]). Напомним, что

$$|W(\mathrm{E}_6)| = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 = 51\,840.$$

Из классификации групп автоморфизмов гладкой кубической поверхности над алгебраически замкнутым полем (см. [6, Table 1]) получаем, что группой автоморфизмов кубики максимального порядка над алгебраически замкнутым полем $\overline{\mathbb{F}}_2$ является группа $\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)$. Данная группа есть группа автоморфизмов кубики Ферма $S \subset \mathbb{P}^3$ (см. [6, Table 8]), которая задана уравнением

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 0.$$

Напомним, что $|\mathrm{PSU}_4(\mathbb{F}_2)| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5 = 25\,920$.

Однако для конечного поля $\mathbb{F}_2$ ситуация сильно меняется. Мы докажем, что для кубических поверхностей над полем $\mathbb{F}_2$ максимальный порядок группы автоморфизмов равен 720.

Теорема 2.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда*

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 720.$$

Более того, если порядок группы автоморфизмов равен 720, *то* $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Доказательство. Группа $\mathrm{Aut}(S)$ лежит в группе $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, потому что вложение $S \subset \mathbb{P}^3$ задается линейной системой $|-K_S|$, которая инвариантна относительно группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$. В то же время она лежит группе Вейля $W(\mathrm{E}_6)$. Предположим, что существует кубическая поверхность S, для которой $720 < |\mathrm{Aut}(S)|$.

Максимальная подгруппа в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ изоморфна одной из следующих групп (см. список максимальных подгрупп группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ в [2, стр. 22]):

$$\mathrm{A}_7,\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2),\ \mathrm{S}_6,\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes (\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3),\ (\mathrm{A}_5 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Используя это описание, по нашему предположению мы получаем, что группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(S)$ должна либо совпадать со всей группой $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, либо быть подгруппой в A_7, либо быть подгруппой в $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)$.

Первый вариант невозможен, так как $|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)|$ не делит $|W(\mathrm{E}_6)|$. Пусть выполнен второй вариант, то есть порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ делит и порядок группы A_7, и порядок группы $W(\mathrm{E}_6)$, то есть

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant \text{НОД}(|\mathrm{A}_7|, |W(\mathrm{E}_6)|) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360 < 720.$$

Значит, этот вариант также невозможен.

Наконец, пусть выполнен третий вариант, иными словами, имеем

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant \text{НОД}(|(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_2)|, |W(\mathrm{E}_6)|) = 2^6 \cdot 3 = 192 < 720.$$

Значит, группа автоморфизмов кубики имеет порядок не больше, чем 720.

Используя таблицу [2, стр. 22], получаем, что единственной подгруппой порядка 720 в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ является группа S_6, так как она максимальная, а другие максимальные подгруппы группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ не содержат группу порядка 720. □

Предъявим явно кубическую поверхность с группой автоморфизмов S_6.

Пример 2.2. Рассмотрим кубику $S \subset \mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, заданную уравнением

$$x^2 t + y^2 z + z^2 y + t^2 x = 0. \tag{2.1}$$

Очевидно, что это уравнение задает гладкую кубику. Более того, она проходит через все точки на $\mathbb{P}^3$. Покажем, что $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Рассмотрим матрицу

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует кососимметрической билинейной форме. Группа, которая сохраняет эту матрицу, то есть группа таких элементов $g \in \mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$, что $g^T \Omega g = \Omega$, изоморфна группе $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2)$.

Заметим, что левая часть уравнения (2.1) равна

$$(x^2, y^2, z^2, t^2)^T \Omega (x, y, z, t).$$

Значит, группа $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2)$ содержится в группе автоморфизмов кубики S. Как известно (см., например, [4, §5]), имеется изоморфизм $\mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_2) \simeq \mathrm{S}_6$. То есть мы получаем, что $\mathrm{S}_6 \subset \mathrm{Aut}(S)$, а по теореме 2.1 группа S_6 является максимальной возможной группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности над $\mathbb{F}_2$. Значит, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{S}_6$.

Отметим, что кубика (2.1) рациональна. В самом деле, на ней есть две непересекающиеся прямые l_1 и l_2, задающиеся уравнениями $x = y = 0$ и $z = t = 0$, соответственно, что и дает бирациональный изоморфизм $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow S$.

Замечание 2.3. В статье [9] с помощью компьютерных вычислений было показано, что группа автоморфизмов кубики (2.1) имеет порядок 720. Тем не менее, в указанной статье не была исследована структура ее группы автоморфизмов.

3. Поверхности дель Пеццо степени 1

В этом разделе мы рассмотрим гладкие поверхности дель Пеццо степени 1.

Утверждение 3.1. *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени 1 над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{Aut}(S) \leqslant 2q^4(q-1)^2(q+1) < q^3(q^3-1)(q^2-1).$$

Доказательство. Накрытие

$$\phi_{|-2K_S|} : S \to \mathbb{P}(1,1,2) \tag{3.1}$$

степени 2, заданное дважды антиканонической линейной системой, дает нам точную последовательность:

$$1 \to G \to \mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2)),$$

где $|G| \leqslant 2$. Найдем группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2))$. Ясно (см. [1, §8.3]), что автоморфизмы задаются следующим образом:

$$[x : y : z] \mapsto [ax + by : cx + dy : ez + f(x, y)],$$

где матрица

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

невырождена, $e \in \mathbb{F}_q^*$, а $f(x, y)$ — однородный квадратичный многочлен. Значит, имеем

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2)) \simeq \frac{\left(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_q) \times \mathbb{F}_q^*\right) \ltimes (\mathbb{F}_q)^3}{\mathbb{F}_q^*}.$$

Следовательно, порядок группы $\mathrm{Aut}(S)$ удовлетворяет неравенству

$$|\mathrm{Aut}(S)| \leqslant 2 \cdot |\mathrm{Aut}(\mathbb{P}(1,1,2))| = 2q^4(q-1)^2(q+1) < q^3(q^3-1)(q^2-1).$$

$\square$

Замечание 3.2. Можно показать, что морфизм (3.1) сепарабельный (см., например, [8, Proposition 1.2]). Поэтому группа G в доказательстве утверждения 3.1 изоморфна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. Доказательство теоремы 1.3

В этом разделе мы докажем теорему 1.3. Сначала напомним результат из статьи [11]:

Утверждение 4.1 ([11, Corollary 5.3])**.** *Пусть S — гладкая поверхность дель Пеццо степени не равной 1 и 3 над полем $\mathbb{F}_q$. Тогда $\mathrm{Aut}(S)$ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не больше чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$.*

Теперь докажем нашу основную теорему.

Доказательство теоремы 1.3. Как уже было замечено ранее, любая конечная подгруппа G группы Кремоны $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{F}_q)$ регуляризуется на G-минимальной модели рациональной поверхности. Поэтому нам достаточно найти минимальный индекс нормальной абелевой подгруппы для каждой группы автоморфизмов поверхностей дель Пеццо и для расслоений на коники. Максимальное такое число и будет нам давать константу Жордана.

Согласно утверждению 4.1, индекс нормальной абелевой подгруппы группы автоморфизмов поверхности дель Пеццо степени не равной 1 и 3 над полем $\mathbb{F}_q$ не превосходит $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. А согласно [11, Lemma 6.1], индекс нормальной абелевой подгруппы группы автоморфизмов расслоения на коники над полем $\mathbb{F}_q$ тоже не превосходит $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. Для поверхностей дель Пеццо степени 1 над полем $\mathbb{F}_q$, согласно утверждению 3.1, группа автоморфизмов всегда имеет порядок меньше, чем $q^3(q^2-1)(q^3-1)$.

Осталось найти наибольшее значение среди всех минимальных индексов нормальных абелевых подгрупп групп автоморфизмов кубических поверхностей. Если $q = 4$ или 8, то

$$|W(\mathrm{E}_6)| = 51\,840 < 60\,480 = |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_4)| \leqslant |\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)|,$$

и, значит, порядок группы автоморфизмов кубики меньше $q^3(q^2-1)(q^3-1)$. А при $q = 2$, согласно теореме 2.1 порядок группы автоморфизмов кубической поверхности не превосходит

$$720 > 168 = q^3(q^2-1)(q^3-1).$$

Все перечисленные значения, а именно, 720 для $\mathbb{F}_2$ и $q^3(q^2-1)(q^3-1)$ для $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_8$, реализуются как порядки групп автоморфизмов некоторых рациональных поверхностей. Действительно, для $q = 4$ и 8 эти значения достигаются на группе автоморфизмов $\mathbb{P}^2$, которая изоморфна $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{F}_q)$ и не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп, см. [11, Lemma 2.4]. Для $q = 2$ значение константы Жордана достигается на рациональной кубике с группой автоморфизмов S_6 (см. пример 2.2), которая тоже не имеет нетривиальных нормальных абелевых подгрупп.

$\square$

Приложение A. Единственность кубики с группой автоморфизмов S_6 над полем $\mathbb{F}_2$

В этом разделе мы докажем теорему 1.5.

Лемма A.1. *Пусть S — гладкая кубическая поверхность в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящая через все 15 точек в $\mathbb{P}^3$. Тогда S изоморфна кубике вида (2.1), и ее группой автоморфизмов является группа S_6.*

Доказательство. Заметим, что кубические поверхности, проходящие все точки $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеют вид

$$a_1xy(x+y)+a_2xz(x+z)+a_3xt(x+t)+a_4yz(y+z)+a_5yt(y+t)+a_6zt(z+t)=0,$$

где $a_i \in \mathbb{F}_2$. Значит, всего таких кубик 63.

Рассмотрим действие группы $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)$ на гладкие кубики в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$, проходящие через 15 точек. Пусть $\mathrm{Orb}(S)$ — орбита S действия группы S_6. Имеем,

$$\frac{|\mathrm{PGL}_4(\mathbb{F}_2)|}{|\mathrm{Aut}(S)|} = |\mathrm{Orb}(S)|.$$

Оценим количество элементов в орбите S. Рассмотрим особую кубическую поверхность, которая является объединением трех плоскостей в $\mathbb{P}^3$, пересекающихся одновременно в одной прямой. Ясно, что на такой приводимой кубической поверхности будет 15 точек. Несложно проверить, что в $\mathbb{P}^3$ над полем $\mathbb{F}_2$ имеется ровно 35 прямых. Значит, таких особых кубик по крайней мере 35. То есть гладких кубик, проходящих через 15 точек, не более 28. Значит, получаем, что $|\mathrm{Orb}(S)| \leqslant 28$. Но тогда имеем неравенство

$$|\mathrm{Aut}(S)| \geqslant 720,$$

что возможно, согласно теореме 2.1, тогда и только тогда когда $\mathrm{Aut}(S) = \mathrm{S}_6$ и $|\mathrm{Orb}(S)| = 28$. Другими словами, все гладкие кубики, проходящие через 15 точек, изоморфны друг другу. Так как кубика вида (2.1) проходит через 15 точек, получаем, что S ей изоморфна.

□

Лемма A.2. *Пусть группа S_6 является группой автоморфизмов гладкой кубической поверхности S над полем $\mathbb{F}_2$. Тогда S изоморфна кубике вида (2.1).*

Доказательство. Заметим, что согласно теореме Шевалле–Варнинга на кубике S есть точка. Обозначим одну из таких точек через p. Действие группы S_6 на S определяет ее действие на $\mathbb{P}^3$. Предположим, что орбита точки p имеет длину $l \neq 5, 10, 15$. Тогда стабилизатор каждой точки в орбите является подгруппой S_6 индекса l. Более того, в стабилизаторе лежит подгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, так как l взаимно просто с 5. Тогда группа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ действует нетривиально на касательном пространстве к $\mathbb{P}^3$ в точке p (см., например, [3, Theorem 3.7]). То есть $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)$. Но это невозможно, так как $|\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)| = 168$.

Случай $l = 5$ невозможен, так как в группе S_6 нет подгруппы индекса 5. Если же $l = 10$, то на $\mathbb{P}^3$ есть еще орбиты действия S_6 длины не больше 5. Но, как мы только что показали, таких нет.

Поэтому возможен только случай $l = 15$. Значит, на кубике S с действием группы S_6 ровно 15 точек. А по лемме A.1 такие кубики изоморфны кубике (2.1).

□

Теперь перейдем к доказательству теоремы 1.5.

Доказательство теоремы 1.5. Первая часть теоремы следует из теоремы 2.1. Существование и единственность следуют из лемм А.1 и А.2.

□

Также из лемм А.1 и А.2 мы получаем следствие.

Следствие А.3. *Группа* S_6 *действует на гладкой кубической поверхности* S *над полем* $\mathbb{F}_2$ *тогда и только тогда, когда* S *проходит через все* 15 *точек в* $\mathbb{P}^3$.

Список литературы

[1] A. Al Amrani, *Classes d'idéaux et groupe de Picard des fibrés projectifs tordus*, K-Theory, **2** (1989), no. 5, 559–578.

[2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. Ph. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *ATLAS of Finite Groups*, Oxford University Press, (1985).

[3] Y. Chen, C. Shramov, *Automorphisms of surfaces over fields of positive characteristic*, arXiv:2106.15906 [math.AG].

[4] J. Dieudonné, *Les Isomorphismes Exceptionnels Entre Les Groupes Classiques Finis*, CJM, **6** (1954), 305–315.

[5] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012

[6] I. Dolgachev, A. Duncan, *Automorphisms of cubic surfaces in positive characteristic*, Izv. RAN. Ser. Mat., **83** (2019), no.3, 15–92.

[7] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, *Finite Subgroups of the Plane Cremona Group*, In: Y. Tschinkel, Y. Zarhin, (eds) *Algebra, Arithmetic, and Geometry. Progress in Mathematics*, **269** (2009), Birkhäuser Boston.

[8] I. Dolgachev, G. Martin, *Automorphisms of del Pezzo surfaces of degree 2 in characteristic 2*, arXiv:2206.08913 [math.AG].

[9] F. Karaoğlu, *Non-Singular Cubic Surfaces over* $\mathbb{F}_{2^k}$, Turk. J. Math., **45** (2021), 2492–2510.

[10] V. L. Popov, *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes, 54, Amer. Math. Soc. (2011), 289–311.

[11] Yu. Prokhorov, C. Shramov, *Jordan property for Cremona group over a finite field*, arXiv:2111.13367 [math.AG].

[12] J.-P. Serre, *A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field*, Mosc. Math. J., **9** (2009), no.1, 183–198.

Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 119048, г.Москва, ул. Усачева, д. 6

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук, 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8

Email address: vikulovaav@gmail.com